

Eratosthenes auf Sylt

Udo Backhaus, Universität Koblenz
Dieter Vornholz, Olbers-Planetarium Bremen

Ist Sylt lang genug, um nach dem Verfahren von Eratosthenes mit einem „Schattenstab“ den Erdumfang zu messen, ohne die Insel zu verlassen? Diese Frage untersuchten wir während der Jahrestagung 1994 des Bundesverbandes Deutscher Schullandheime – mit einem erstaunlich guten Ergebnis.

1 Einleitung

Kann man durch Blick zum Himmel herausfinden, wie lang Sylt ist? Diese Frage ist nicht etwa auf Getränke zurückzuführen, die für die Nordfriesischen Inseln typisch sind. Sie ist vielmehr Ausdruck unseres Wunsches herauszufinden, wie groß die Genauigkeit von einfachsten astronomischen Geräten und Messungen ist: Kann man auf Sylt mit Schattenstäben den Unterschied zwischen den geographischen Breiten von Nord- und Südspitze feststellen? Oder: Kann man auf Sylt mit Hilfe von Schattenstäben den Erdumfang astronomisch messen?

Während der Tagung des Bundesverbandes Deutscher Schullandheime im September 1994 auf Sylt war auch ein Arbeitskreis zur Astronomie eingerichtet worden. Hier wurden einfache Beobachtungen zu Sonne, Mond und Sternen vorgestellt und Anleitungen zum Bau von astronomischen Geräten gegeben. Unter anderem sollte auch die Beobachtung mit einem Schattenstab veranschaulicht und die Bedeutung des Gnomon bei der Bestimmung des Erdradius durch Eratosthenes erwähnt werden. Dabei überlegten wir uns, wie lang wohl die Standlinie sein müßte, um den Erdradius bestimmen oder umgekehrt eine Entfernung astronomisch messen zu können. Sollte es vielleicht möglich sein, auf der Insel selbst zu Ergebnissen zu kommen?

Wir waren uns des Risikos bewußt, für die Länge von Sylt negative Werte zu erhalten, und hatten deshalb am selben Tag eine Parallelmessung in Trier (Herr und Frau Fries) organisiert. Mit den Meßwerten aus Trier und denen von Sylt sollte dann in jedem Fall ein annehmbarer Wert für den Erdradius zu ermitteln sein.

Wider Erwartungen schien tatsächlich in Trier und auf Sylt zu gleicher Zeit die Sonne – nicht ganz selbstverständlich im Oktober! –, und wir konnten alle Messungen durchführen.

2 Meßmethode

Sylt ist etwa 30km lang, der Unterschied in der geographischen Breite zwischen Nord- und Südspitze beträgt also ungefähr 0.27° . Diese Winkeldifferenz kann bei einmaliger Messung offensichtlich nur gemessen werden, wenn die Fehler der Einzelmessungen nicht wesentlich

größer als 0.1° sind. Wir wollten die Breitendifferenz durch *gleichzeitige* Messung der Sonnenhöhe bestimmen. Da Trier jedoch nicht auf demselben Längengrad liegt, entschieden wir uns, die *größte* Sonnenhöhe zu bestimmen, also zum Zeitpunkt des wahren Mittags (am 1.10. auf Sylt um 12.17 Uhr, in Trier um 12.23 Uhr MEZ) zu messen.

Die Sonnenhöhe sollte aus der Länge l eines Schattenstabes mit der Höhe h berechnet werden:

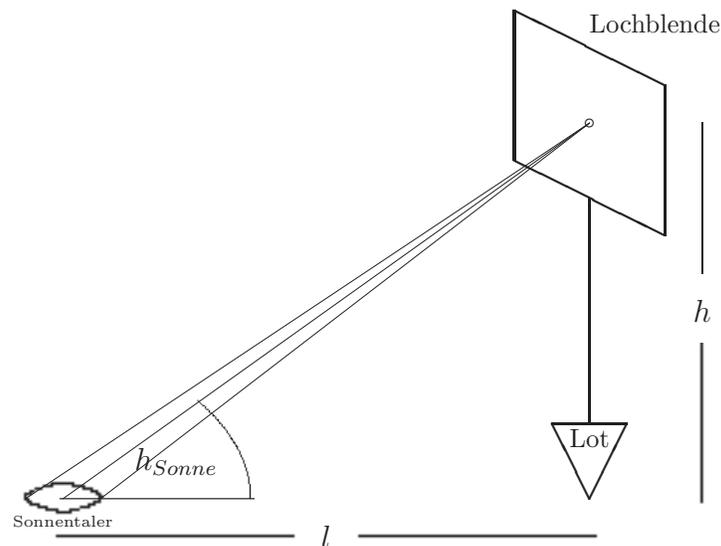
$$h_{\text{Sonne}} = \arctan \frac{h}{l} \implies dh_{\text{Sonne}} = \frac{1}{2} \left(\frac{dl}{l} + \frac{dh}{h} \right) \sin 2h_{\text{Sonne}}$$

Die Mittagshöhe der Sonne beträgt Ende September auf Sylt etwa

$$h_{\text{Sonne}} = 90^\circ - \varphi_{\text{Sylt}} - \delta_{\text{Sonne}} \approx 90^\circ - 55^\circ - 3^\circ = 32^\circ.$$

Um eine Genauigkeit von $0.1^\circ \hat{=} dh_{\text{Sonne}} \approx 0.0017$ zu erreichen, müssen also h und l auf etwa 0.2% gemessen werden. Bei Längen von etwa 50cm muß also eine Genauigkeit von 1mm erreicht werden.

Eine solche Genauigkeit ist mit einem normalen Schattenstab nicht zu erreichen. Wir ersetzten ihn deshalb durch ein Lot, an dessen oberem Ende wir das Loch eines Schnellhefterstreifens befestigten, der zur Kontrastverstärkung mit einem Stück Pappe zusätzlich abgeschattet wurde. Die Mitte des elliptischen „Sonnentales“, des Lochkamerabildes der Sonne, ist dann recht genau zu bestimmen.



Eine Gruppe fuhr ganz in den Norden der Insel und fand auf dem Ellenbogen ein sonnenbeschienenes Stück Beton, das nach Auskunft der Wasserwaage hinreichend waagrecht war. Die Gruppe im Süden fand beim Hafen keine geeignete Betonfläche. Sie richtete deshalb im Sand des Strandes ein Brett horizontal aus. Bei beiden Gruppen war der Wind das größte Problem. Menschliche Körper, Holzplatten und Mäntel mußten als Windschutz dienen, um den Fußpunkt des Lotes genau genug bestimmen zu können ([1]).

3 Meßergebnisse

1. Hafen

Länge des Lotes: 373 mm

Meßergebnisse

Uhrzeit (MEZ)	12.15	12.17	12.18	12.19	12.20
Schattenlänge in mm	592	594	<u>593</u>	592	591

Um 12.18 Uhr hing das Pendel am ruhigsten. Aus den Meßwerten ergibt sich für die Sonnenhöhe: $h_{Hafen} = 32.17^\circ \pm 0.08^\circ$.

2. Ellenbogen

Länge des Lotes: 507.5 ± 1.0 mm

Schattenlänge: $814.5 \text{ mm} \pm 0.5 \text{ mm}$

Daraus ergibt sich für die Sonnenhöhe: $h_{Ellenbogen} = 31.93^\circ \pm 0.06^\circ$.

Aus diesen Ergebnissen ergibt sich für die Sonne eine Höhendifferenz von

$$\Delta h_{Sonne} = 0.24^\circ \pm 0.14^\circ.$$

Dabei war unserer Einschätzung nach der mittlere Wert mit Abstand der zuverlässigste. Mit dieser Messung ist es gelungen, die Differenz der geographischen Breiten der beiden Beobachtungsorte und damit einen sehr kleinen Winkel tief im Innern der Erde (den zu Sylt gehörenden Zentrumsinkel) zu bestimmen ([2]). Für das Verhältnis von Erdumfang und Länge von Sylt gilt also:

$$\frac{\text{Länge von Sylt}}{\text{Erdumfang}} = \frac{0.24^\circ}{360.00^\circ}.$$

Leider war die Zeit zu kurz und das Wetter zu windig, um die Entfernung zwischen den beiden Beobachtungsorten mit dem Fahrrad selbst zu bestimmen. Wir mußten sie deshalb einer genauen Karte entnehmen: 32 km . Damit ergibt sich der Umfang der Erde zu

$$U_{Erde} = \frac{360.00^\circ}{0.24^\circ} 32 \text{ km} = 48000 \text{ km}.$$

Damit weicht unser Ergebnis nur um etwa 20% vom richtigen Wert ab! Wie die Fehler bei den einzelnen Messungen zeigen, haben wir dabei aber auch Glück gehabt.

Mit den der Karte entnommenen geographischen Breiten der beiden Orte (55.05° bzw. 54.76°) und der Sonnendeklination von -3.2° ergibt sich für die „tatsächliche“ Höhe der Sonne: $h_{Ellenbogen} = 31.75^\circ$ und $h_{Hafen} = 32.04^\circ$. Interessanterweise ist die Differenz deutlich besser als die Einzelergebnisse.

In Trier ($\varphi = 49.57^\circ$) ergab sich mit einer Stablänge von 800 mm eine Schattenlänge von 1051 mm und damit eine Sonnenhöhe von

$$h_{Trier} = 37.28^\circ.$$

Damit ergibt sich eine Breitendifferenz von $\Delta\varphi = 5.35^\circ$ (gegenüber dem „tatsächlichen“ Wert von $\Delta\varphi = 5.48^\circ$). Der absolute Fehler ist etwa gleich groß, der relative natürlich viel kleiner.

4 Schlußbemerkungen

Die Antwort, die wir auf die eingangs gestellte Frage gefunden haben, lautet also: Sylt ist, „astronomisch gemessen“ (d.h. unter Benutzung des als bekannt vorausgesetzten Erdumfanges von 40000km) etwa 27km lang. Das ist kein sehr genaues, aber angesichts unserer Meßgeräte und des Freihandcharakters unserer Messungen ein erstaunlich gutes Ergebnis. Inwieweit uns das Glück dabei behilflich war, könnten erst Wiederholungsmessungen zeigen. Wichtiger als das Ergebnis aber ist das, was die Teilnehmer bei Vorbereitung, Durchführung und Auswertung alles lernen konnten und wieviel Freude sie dabei erlebten!

Wir glauben, daß es sich lohnt, die Messung bei Klassenfahrten oder Schullandheimaufenthalten an anderen Orten zu wiederholen (*Wagenschein* ([2]) hat eindrucksvoll geschildert, wie dabei gelernt werden kann!). Dabei sollte natürlich die Länge der Basis selbst bestimmt, am besten erwandert oder erradelt werden.

Bei geringerer Meßgenauigkeit muß die Entfernung zwischen den beiden Beobachtungsorten größer gewählt werden. Dazu bietet sich die Zusammenarbeit von Klassen oder Kursen verschiedener Schulen an. Ist ein solcher Kontakt erst einmal zustande gekommen, kann er auch zu anderen sehr schönen Projekten benutzt werden, z.B. zur Bestimmung der Mondentfernung ([2]).

Literatur

- [1] Ein ganz ähnlicher Aufsatz erscheint unter dem Titel „Wie lang ist Sylt?“ in *Astronomie und Raumfahrt*, dort aber mit einigen Fotos.
- [2] M. Wagenschein, *Mathematik aus der Erde (Geo-metrie)* und *Wie weit ist der Mond von uns entfernt?*, in: *Naturphänomene sehen und verstehen – Genetische Lehrgänge*, Klett: Stuttgart 1988