

Radius und Neigung der Marsbahn

Astronomisches Praktikum

Dr. Udo Backhaus, Universität Osnabrück, Fachbereich Physik
Barbarastr. 7, 4500 Osnabrück

[Astronomie und Raumfahrt 34/4, 31 (1997)]

Werden Positionen von Mars während seiner Oppositionsschleife nach Fernglasbeobachtung oder Fotografieren in eine Sternkarte übertragen, dann können aus der vermessenen rückläufigen Bewegung Bahnradius und Bahnneigung abgeleitet werden.

Einleitung

Planeten fallen durch ihre große und veränderliche Helligkeit und durch ihre Bewegung vor dem unveränderlichen Hintergrund der Fixsterne auf. Verfolgt man sie über längere Zeit, dann stellt man fest, dass sie sich meist ungefähr „gradlinig“ (d.h. auf einem Großkreis) von West nach Ost (*rechtläufig*) bewegen. Manchmal aber beginnen sie zu zögern, werden immer langsamer und setzen schließlich ihre Wanderung in der entgegengesetzten Richtung fort (sie werden *rückläufig*) – nur um einige Zeit später abermals umzukehren. Während dieser Zeit der Rückläufigkeit erreichen sie ihre größte Helligkeit. Diese Wanderung kann am leichtesten verfolgt werden, wenn helle Sterne in der Nähe sind. Bild 1 zeigt die Schleifen, die Mars in den letzten Jahren gezogen hat.

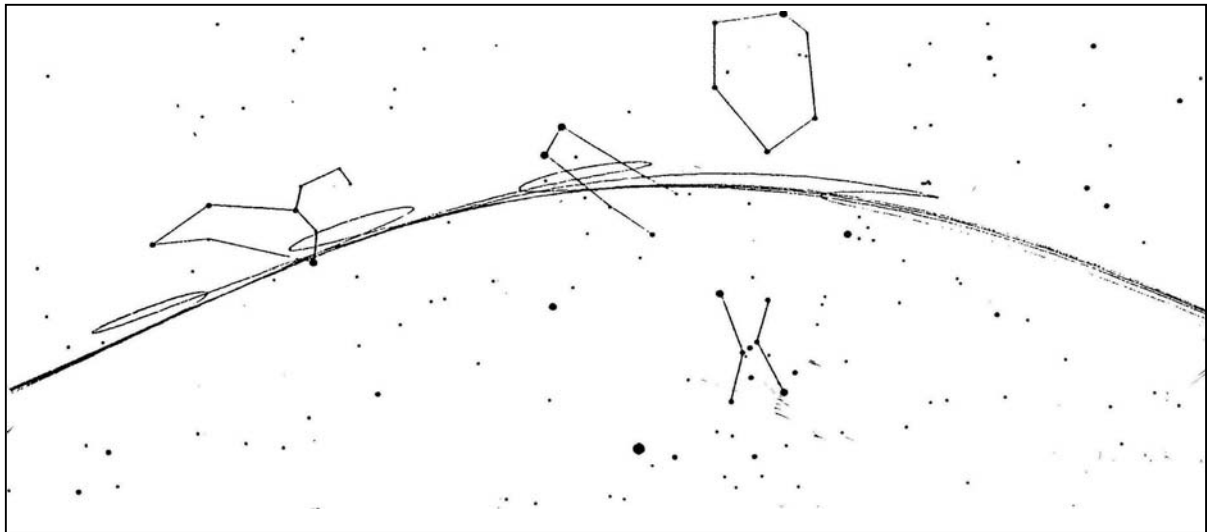


Bild 1: Marsschleifen 1990 – 1997 in den Sternbildern Stier, Zwillinge und Löwe

Die Schleifenbewegung entsteht dadurch, dass wir die Planeten von der ebenfalls sich bewegenden Erde aus beobachten: Während des Überholvorganges scheint sich der Planet in der entgegengesetzten Richtung zu bewegen. Dieser *Parallaxeneffekt* kann dazu benutzt werden, die Entfernung des Planeten von der Erde und damit seinen Abstand von der Sonne zu bestimmen.

Diese Bestimmung wird hier in die Form einer Praktikumsaufgabe gekleidet, die es ermöglicht, trotz fehlender Beobachtungsmöglichkeiten praktische Astronomie mit wirklichkeitsnahem Material zu betreiben: Am Beispiel von Mars soll nachvollzogen werden, wie der Bahnradius von Planeten aus Beobachtungen ihrer Bewegung während der Rückläufigkeit abgeleitet werden kann.

Die Sternkarte auf Seite 33 enthält sechs Positionen von Mars während seiner Rückläufigkeit 1993 in den Zwillingen. Sie wurden von Fotos auf die Karte übertragen, die mit feststehender Kamera aufgenommen wurden. Die Beobachtungen können ähnlich auch an Venus und Jupiter und eventuell an Saturn durchgeführt werden. Statt der fotografischen Positionsbestimmung können auch Fernglasbeobachtungen herangezogen werden (1/).

Etwas Theorie

In dieser Praktikumsaufgabe wird vereinfachend angenommen, dass die Planeten die Sonne gleichförmig auf konzentrischen Kreisbahnen umlaufen, die alle in der Ebene der Ekliptik liegen. In einem verfeinernden Schritt wird anschließend die Neigung der Marsbahn gegen die Ekliptik berücksichtigt. Die Bestimmung der Exzentrizität der Marsbahn wird an anderen Stellen (3/, 4/) beschrieben.

Bild 2 zeigt die rückläufig scheinbare Bewegung $P_1' P_2'$ eines äußeren Planeten P während er durch die Erde E überholt wird. Dabei ist P_2' die Position des Planeten am Fixsternhimmel am Tage seiner Opposition. Von den eingezeichneten Winkeln kann nur die scheinbare Verschiebung η des Planeten am Himmel direkt gemessen werden. Die zugehörigen Zentralwinkel ε und β können jedoch berechnet werden, wenn die siderischen Umlaufzeiten von Erde und Planet bekannt sind. Anwendung des Sinussatzes auf das Dreieck SE_1P_1 ergibt

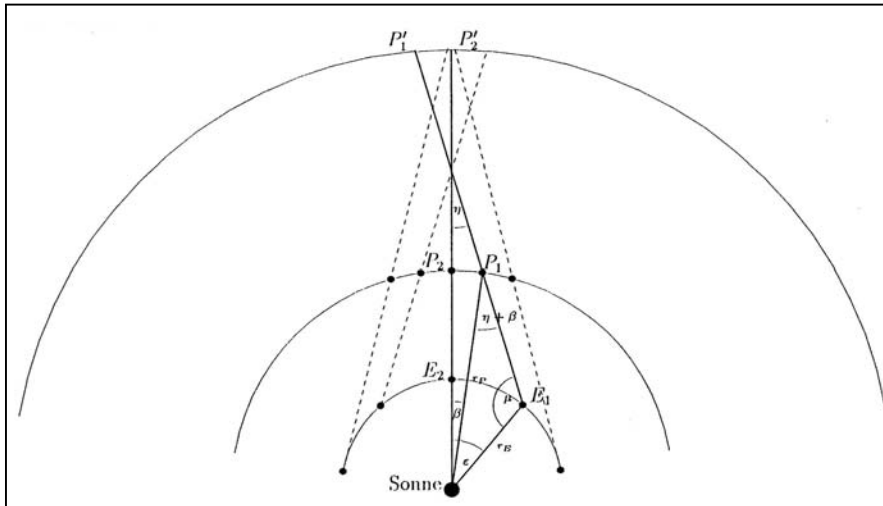


Bild 2: Winkelverhältnisse während der Rückläufigkeit

$$\frac{r_p}{r_E} = \frac{\sin \mu}{\sin(\beta + \eta)} \Rightarrow r_p = \frac{\sin(\varepsilon + \eta)}{\sin(\beta + \eta)} r_E.$$

(1)

Der Radius der Planetenbahn kann also berechnet werden, wenn die Positionen des Planeten am Tage seiner Opposition und an einem zusätzlichen Tage während seiner Rückläufigkeit bekannt sind. Wenn der Planet bei Opposition unbeobachtbar war, kann seine Position z.B. durch Interpolation gewonnen werden (siehe auch/1/).

Mit Bild 2 kann nur die Rückläufigkeit des Planeten erklärt, nicht aber die Gestalt der Oppositionsschleife beschrieben werden, die auf der Neigung der beiden Bahnebenen gegeneinander beruht. Zur Bestimmung der Bahnneigung i muss zusätzlich der Zeitpunkt des letzten Knotendurchganges bekannt sein (Bild 3):

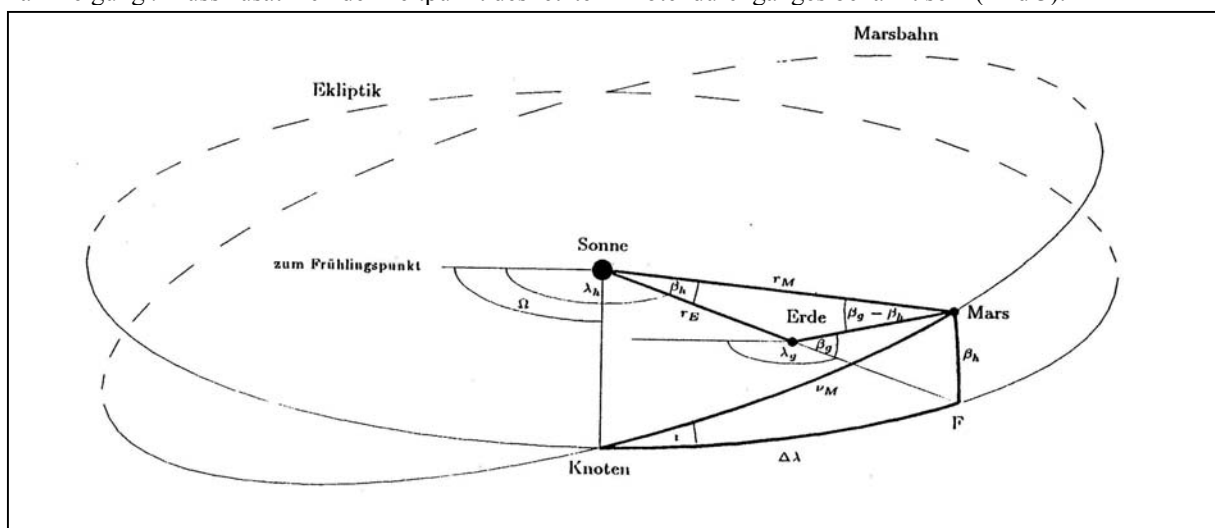


Bild 3: Zur Bestimmung der Neigung i der Marsbahn

Zunächst bestimmt man die *geozentrisch* ekliptikalen Koordinaten (λ_g, β_g) der Oppositionsposition und aus ihnen mit Hilfe des Sinussatzes für das Dreieck Sonne – Erde – Mars die *heliocentrisch* ekliptikalen Koordinaten (λ_h, β_h):

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\beta_g - \beta_h)}{r_E} &= \frac{\sin(180^\circ - \beta_g)}{r_M} \\ \Rightarrow \sin(\beta_g - \beta_h) &= \frac{\sin \beta_g}{r_M} r_E \\ \Rightarrow \beta_h &= \beta_g - \arcsin\left(\frac{\sin \beta_g}{r_M} r_E\right) \end{aligned} \quad (2)$$

Anwendung des Sinussatzes auf das sphärische Dreieck Knoten -F- Mars ergibt dann die gesuchte Bahnneigung i :

$$\frac{\sin \beta_h}{\sin i} = \frac{\sin \nu_M}{\sin 90^\circ} \Rightarrow \sin i = \frac{\sin \beta_h}{\sin \nu_M} \quad (3)$$

Dabei ist ν_M die wahre Anomalie des Mars, d. h. der Winkel, den Mars seit dem Knotendurchgang in seiner Bahnebene zurückgelegt hat. Sie lässt sich leicht aus der zwischenzeitlich vergangenen Zeit berechnen. Die Berechnung der Knotenlänge Ω kann man der Abbildung direkt entnehmen:

$$\Omega = \lambda_h - \Delta\lambda = \lambda_g - \Delta\lambda \quad (4)$$

Aufgaben

Im Folgenden wird vereinfachend angenommen, dass Erde und Mars *gleichförmig auf konzentrischen Kreisen um die Sonne* laufen. Zunächst wird darüber hinaus vorausgesetzt, dass Marsbahn und Erdbahn in derselben Ebene liegen.

Die siderische Umlaufzeit von Mars

Die letzten Marsoppositionen fielen auf den **7. Januar 1993**, den **11. Februar 1995** und den **17. März 1997** (Wie kann man das feststellen?). Aus diesen Angaben soll zunächst die siderische Umlaufzeit T_{sid} von Mars abgeschätzt werden.

Trage dazu in das Bild 4 die Positionen von Erde und Mars für die drei Oppositionszeitpunkte ein. Zur Hilfe dienen die folgenden Teilaufgaben:

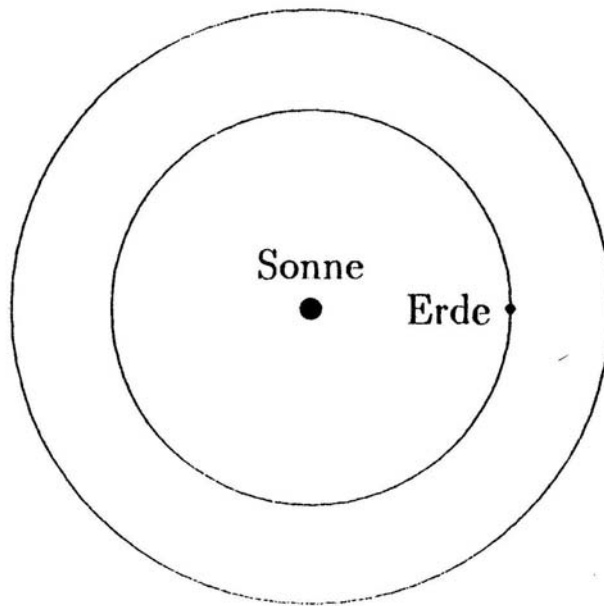


Bild 4: Sonne und Erde am 7. Januar 1993

- (a) Wie groß ist die mittlere Winkelgeschwindigkeit μ_E der Erde, d. h. die Geschwindigkeit, mit der der Leitstrahl Sonne-Erde umläuft?

$$\mu_E = \quad \text{°/d}$$

- (b) Welche Abschätzung für die synodische Umlaufzeit T_{syn} (Zeitraum zwischen zwei gleichen Konstellationen Sonne – Erde – Planet) von Mars ergibt sich aus oben angegebenen Oppositionsdaten (Literaturwert: $T_{\text{syn}} = 780$ Tage)?

$$T_{\text{syn}} = \quad \text{Tage}$$

- (c) Wie groß ist der Zentralwinkel ε , den die Erde in dieser Zeit überstreicht, wie groß demnach der von Mars überstrichene Winkel β ?

$$\varepsilon = \quad \text{°}, \beta = \quad \text{°}$$

- (d) Welche Werte für die Winkelgeschwindigkeit μ_M und die siderische Umlaufzeit T_{sid} (Zeit für einen Umlauf um die Sonne bzgl. der Fixsterne) von Mars (Literaturwert: 687 Tage) ergeben sich daraus?

$$\mu_M = \quad \text{°/d} \Rightarrow T_{\text{sid}} = \quad \text{Tage}$$

Rekonstruktion des zweiten Teils der Marsschleife

- (a) Die Sternkarte auf Seite 33 enthält die Positionen von folgenden Tagen während seiner Oppositionsschleife 1993: **2.1.,16.1.,29.1.,20.2.,24.3.** Am Tage der Opposition, dem **7.1.**, war Mars unbeobachtbar.
- (b) Füge die Position am Tage der Opposition (7.1.) hinzu, indem du zwischen den beiden benachbarten Positionen linear interpolierst!

Bestimmung des Marsbahnradius

- (a) Bestimme für die Positionen *während der Rückläufigkeit* die Anzahl Δt der seit dem Tag der Opposition verstrichenen Tage, und berechne die in diesen Zeiten von Erde und Mars überstrichenen Zentralwinkel ε und β .

Datum	Δt	ε	β	η	r_M
02.1.1993					
16.1.1993					
29.1.1993					
20.2.1993					

- (b) Miss in der Sternkarte die zugehörigen Positionsveränderungen η Mars, indem du zunächst den Maßstab der Karte bestimmst.

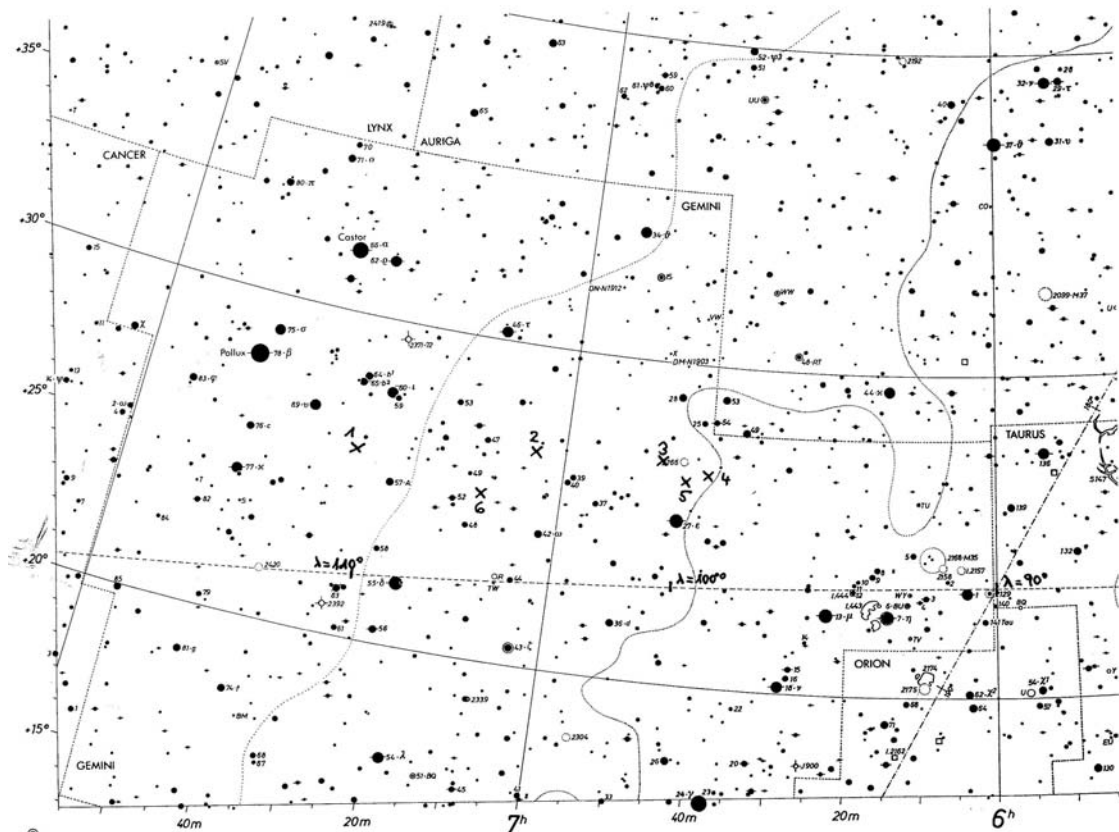
Maßstab: $^\circ/\text{cm}$

- (c) Der Radius r_M der Marsbahn (Literaturwert für die große Halbachse: $a = 1.52 \text{ AE}$) kann dann aus der Gleichung (1) berechnet werden.

Bahnneigung i und Knotenlänge Ω

- (a) Miss in der Sternkarte (mit Hilfe der eingezeichneten Ekliptik) die geozentrisch ekliptikalen Koordinationen (λ_g, β_g) der Opposition aus!

$\lambda_g =$, $\beta_g =$



Sternkarte mit Marspositionen

(b) Leite daraus mit Hilfe von Bild 3 und Gleichung (2) die heliozentrisch ekliptikalen Koordinaten (λ_h, β_h) von Mars am 7.1. ab!

$$\lambda_h = \quad , \quad \beta_h =$$

(c) Der letzte Knotendurchgang von Mars fand am **15.9.1992** statt. (Wie kann man das feststellen?). Welchen Winkel v_M hat Mars seitdem überstrichen? Berechne daraus die Neigung i der Marsbahn nach (3) (Literaturwert: 1.85°) und nach (4) die heliozentrisch ekliptikale Länge Ω des Marsbahnknotens (Literaturwert: 45.5°). (Wegen der kleinen Bahnneigung kannst du dabei $\Delta\lambda \approx v_M$ annehmen.)

$$v_M = \mu_M \Delta t \Rightarrow i = \arcsin \frac{\sin \beta_h}{\sin v_M} =$$

$$\Omega = \lambda_g - v_M =$$

Schlussfolgerungen

Auf Grund der gemachten Vereinfachungen (gleichförmiger Planetenumlauf auf Kreisen um die Sonne, die alle in der Ekliptikebene liegen) ist die Messung des Bahnradius auch für äußere Planeten recht einfach.

Der sich ergebende Wert für den Marsbahnradius ist überraschend gut. Berücksichtigt man die Bahnneigung der Marsbahn und die Lage ihrer Knoten, dann kann man mit den aus den Beobachtungsdaten folgenden Werten für Bahnradius, Bahnneigung und Knotenlänge Größe und Gestalt der Oppositionsschleife 1993 gut verstehen.¹⁾

Die mit den Ergebnissen dieses Aufsatzes berechnete Marsbahn gibt jedoch bereits die benachbarten Oppositionsschleifen nicht richtig wieder. Der wichtigste Grund dafür ist der schlechte Wert für die siderische Umlaufzeit von Mars. Bild 5 zeigt jedoch, dass sich mit den richtigen Werten für Umlaufzeiten, Bahnneigung und Knotenlänge eine recht befriedigende Übereinstimmung mit der im Bild 1 gezeigten tatsächlichen Bahn ergibt.

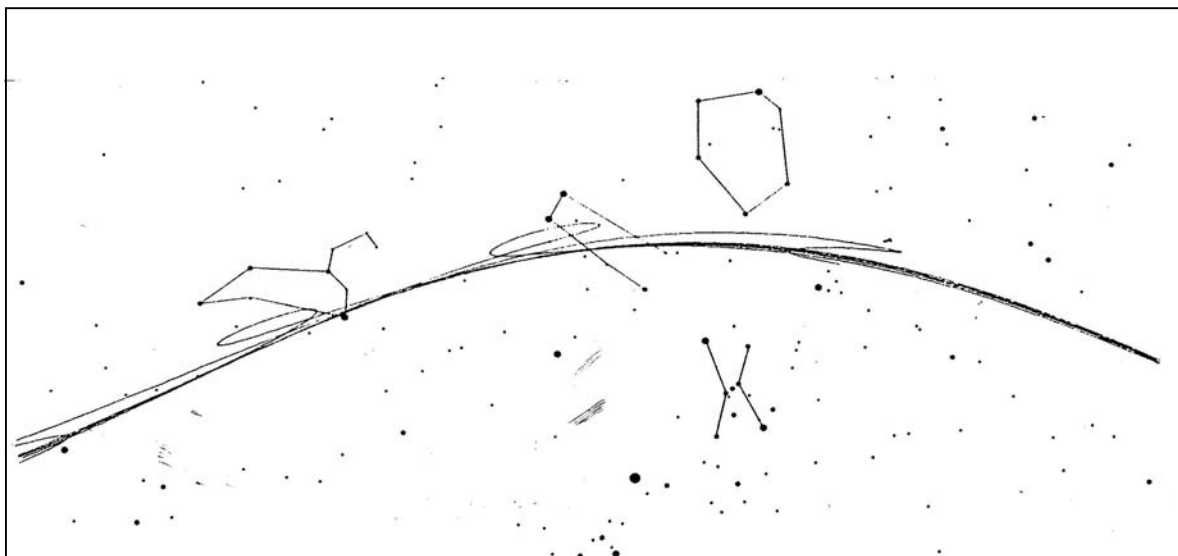


Bild 5: Mit den Vereinfachungen dieser Übung, aber mit korrekten Werten für Bahnradius, Bahnneigung und Knotenlänge berechnete Marsbewegungen 1990-1997

Der größte Teil der verbleibenden Unterschiede beruht auf der Exzentrizität der Marsbahn (/3/) und der nicht konstanten Bahngeschwindigkeit von Mars. Die Notwendigkeit, auch die Ellipsenform der Marsbahn zu berücksichtigen, ergibt sich erst bei sehr viel höheren Anforderungen an die Genauigkeit. Der Grund dafür ist die sehr geringe Abweichung der Marsbahn von der Kreisform (siehe z.B. /2/).

Anmerkungen

1) Ein entsprechendes kleines Computerprogramm kann beim Autor gegen Einsendung einer formatierten Diskette und eines frankierten Rückumschlages angefordert werden.

Literatur

/1/ Backhaus, U.: Bestimmung der Radien von Planetenbahnen mit Fernglas und Sternkarte, Praxis der Naturwissenschaften 39/5, 10 (1990).

/2/ Backhaus, U.: Beobachtung und Interpretation von Planetenbewegungen, Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 45/8, 483 (1992)

/3/ Gingerich, O.: Laboratory Exercises in Astronomy: The Orbit of Mars, Sky & Telescope 26/4, 300 (1983).

/4/ Klinger, U.: Die Bestimmung der Marsbahn nach Johannes Kepler – ein graphisches Verfahren, Vorträge der DPG, Duisburg 1995, S. 110.

/5/ Tirion, W.: Sky Atlas 2000.0, Sky Publishing, Cambridge 1982.