

Messung der Astronomischen Einheit nach Ole Römer

(mit Lösungen)

1 Einleitung

Misst man um die Zeit der Jupiteropposition die Umlaufzeit des Jupitermondes Io, dann kann man feststellen, dass sich die folgenden Austritte dieses Mondes aus dem Jupiterschatten während des nächsten halben Jahres bis zur Konjunktion von Jupiter immer mehr verspäten. Nach der Konjunktion treten die Verfinsterungen dagegen immer früher ein. Römer erkannte in dieser Erscheinung einen Lichtlaufzeiteffekt, der auf dem sich ändernden Abstand zwischen Erde und Jupiter beruht, und bestimmte daraus den ersten Wert für die Lichtgeschwindigkeit (siehe z.B. [4]).

Heute, da die Lichtgeschwindigkeit bereits auf dem Labortisch gemessen werden kann, kann der Effekt umgekehrt benutzt werden, die Astronomische Einheit zu messen ([3],[2]). Als „Beobachtungsdaten“ werden in dieser Aufgabe die Angaben benutzt, die man einem astronomischen Kalender ([1]) für die Zeitpunkte der Schatteneintritte (**VA**) bzw. der Verfinsterungsenden (**VE**) des innersten Galileischen Mondes **Io** entnehmen kann.

2 Etwas Theorie

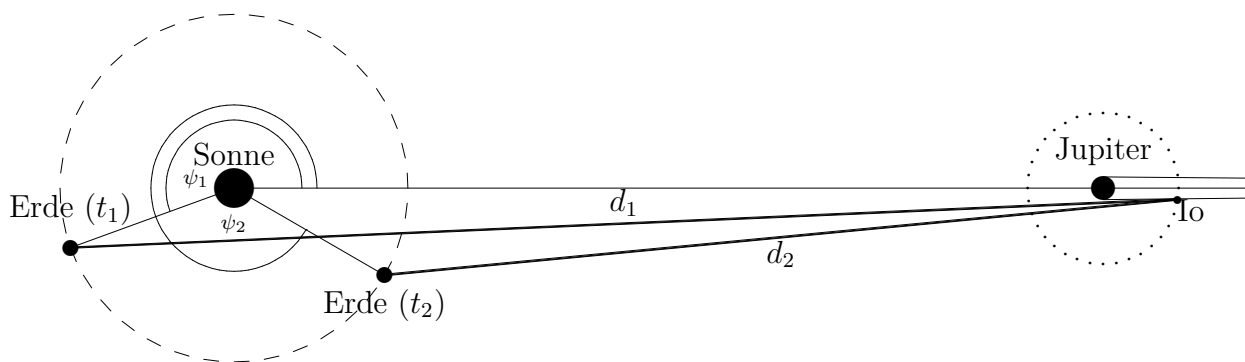


Abbildung 1: Zur Messung der Astronomischen Einheit durch Beobachtung von Io-Verfinsterungen

Der Jupitermond Io hat eine *synodische* Umlaufzeit von T_{Io} . Zwischen t_1 und t_2 haben n Io-Umläufe stattgefunden. Ios Verfinsterung müsste also zur Zeit $t_1 + nT_{Io}$ stattfinden. Sie wird aber zum früheren Zeitpunkt t_2 beobachtet.

Die Zeitdifferenz ist ein Maß für die Veränderung des Abstandes zwischen Erde und Jupiter.

$$d_1 - d_2 = c(t_1 + nT_{Io} - t_2)$$

Bei bekanntem Bahnradius von Jupiter (in AE) und bekannten Winkeln ψ_1 und ψ_2 , die sich aus den seit der letzten Jupiteropposition vergangenen Zeiten t_1 und t_2 und der Umlaufzeit (im rotierenden Bezugssystem, in dem Jupiter ruht, ist das die synodische Umlaufzeit von Jupiter) ergeben, kann $d_1 - d_2$ in Vielfachen einer AE berechnet werden:

$$d_1 - d_2 = \alpha AE \quad \implies \quad 1AE = \frac{c}{\alpha}(t_1 + nT_{Io} - t_2)$$

Römers Verfahren kann anhand der Angaben in einem Astronomischen Kalender ([1]) nachvollzogen werden. Bei einzelnen Io-Umläufen ist der zu untersuchende Effekt zwar kleiner als die Genauigkeit der Angaben; er summiert sich aber im Laufe von Monaten zu mehreren Minuten.

Um die Rechnungen zu vereinfachen, werden die (um 2450000 verringerten) julianischen Daten der Verfinsterungszeitpunkte mit angegeben.

3 benötigte Hilfsmittel

- Lineal
- Geodreieck bzw. Winkelmesser
- einfacher Taschenrechner
- evtl. Computer

Literatur

- [1] Ahnert, *Kalender für Sternfreunde 1997*, Johann Ambrosius Barth: Heidelberg usw. 1996
- [2] H.-L. Neumann, *Die Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit durch Ole Römer*, Praxis der Naturwissenschaften/Physik 37/4, 16 (1988)
- [3] U. Quast, U. Backhaus, *Die Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit nach Römers Verfahren mit Hilfe eines astronomischen Kalenders*, Naturwissenschaften im Unterricht (Physik/Chemie) 35/7, 35 (1987)
- [4] O. Römer, *Eine Demonstration der Bewegung des Lichtes*, Übersetzung der Originalarbeit von 1676, in S. Sambursky (Hrsg.): *Der Weg der Physik*, dtv 6093: München 1978

4 Aufgaben (mit Lösungen)

Römers Methode zur Messung der Lichtgeschwindigkeit soll anhand der Verfinsterungszeitpunkte nachvollzogen werden, die einem astronomischen Kalender für 1997 ([1]) entnommen wurden.

Die folgenden Aufgaben können auch mit einem Tabellenkalkulationsprogramm (z.B. Excel) bearbeitet werden. Die Daten der Tabelle auf S. 7 liegen auch als Tabellenblatt vor¹.

- (a) Warum kann man nicht alle Verfinsterungen Ios beobachten?
Jupiter muss über, die Sonne unter dem Horizont stehen.
- (b) Warum lassen sich *vor* der Opposition nur die *Eintritte* Ios in den Jupiterschatten (**VA** für Verfinsterungsanfang), nach der Opposition dagegen nur die *Austritte* (**VE**) beobachten?
Aus geometrischen Gründen (s. Abb. 1)
- Den Werten kann man eine Schätzung T_{appr} für Ios Umlaufzeit entnehmen. Wie groß ist diese?

$$T_{appr} = 1.770139 \text{ Tage}$$

- Bestimme mit Hilfe von T_{appr} die Anzahl n_i der Umläufe zwischen den beobachtbaren Verfinsterungen.
- Aus den Zeitspannen dt_i und der Anzahl der Umläufe ergeben sich die jeweiligen mittleren Umlaufzeiten T_i .
- Berechne die tatsächliche (synodische) Umlaufzeit T_{Io} von Io als gewichtetes Mittel aller T_i (d.i. die insgesamt vergangene Zeit dividiert durch die Anzahl der Umläufe²).

$$T_{Io} = 1.769873 \text{ Tage}$$

- Mit T_{Io} lässt sich berechnen, wieviel Zeit Δt_{erw} zwischen den Verfinsterungsenden am **20.8.** und am **15.12.** vergehen müsste.

$$\Delta t_{erw} = 116.811618 \text{ Tage}$$

- Wie groß ist aber die tatsächlich beobachtete Zeitspanne Δt_{gem} ?

$$\Delta t_{gem} = 116.819444 \text{ Tage}$$

- Der Austritt Ios aus dem Jupiterschatten am 15.12. verspätet sich also um

$$\Delta t_L = \Delta t_{gem} - \Delta t_{erw} = 11.53 \text{ min}$$

¹Das Tabellenblatt enthält keine Julianischen Daten, weil es mit Excel möglich ist, Zeitdifferenzen direkt berechnen zu lassen.

²Das ist das beste, was man mit den Daten eines Jahres tun kann: Man muss hoffen, dass sich die Laufzeitfehler vor und nach der Opposition ungefähr kompensieren!

9. Die Änderung der Entfernung Δd zwischen Erde und Jupiter zwischen dem 20.8. und dem 15.12. kann aus den bekannten Werten für den Radius der (als kreisförmig angenommenen) Jupiterbahn ($r_{\text{Jup}} = 5.0 \text{AE}$) und die synodische Umlaufzeit ($T_{\text{syn}} = 398.9 \text{Tage}$) Jupiters bestimmt werden:

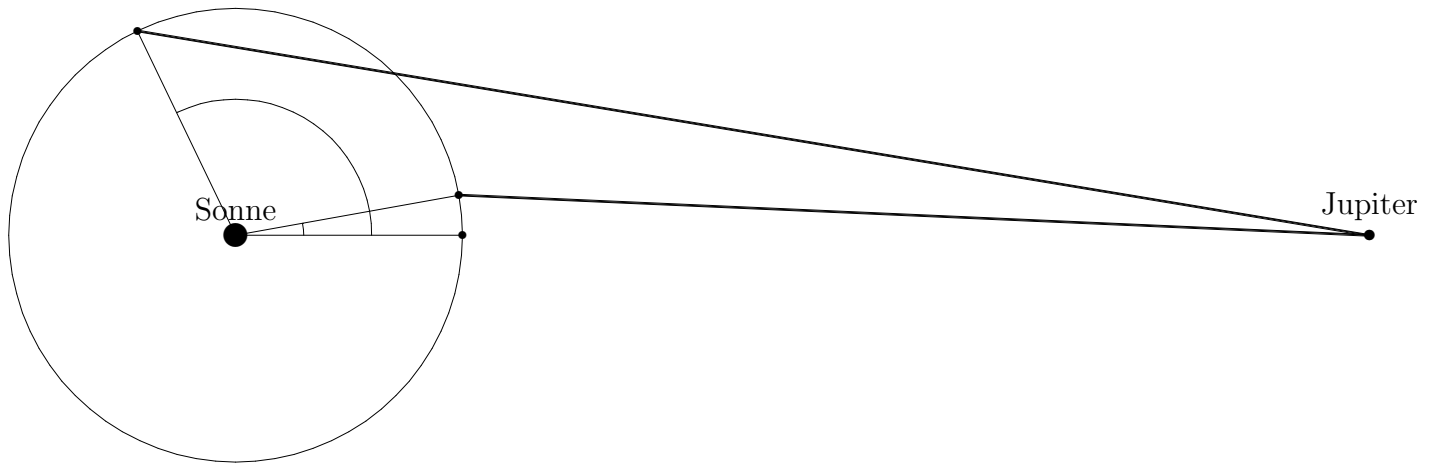


Abb. 2 Positionen der Erde in dem Bezugssystem, in dem Sonne *und* Jupiter ruhen³

- (a) Zeichne die Position der Erde zum Zeitpunkt der Jupiteropposition ein!
 (b) Bestimme die Positionen der Erde am 20.8. und 15.12., und zeichne sie ein⁴.
 Berechne dazu zunächst die seit der Opposition verstrichenen Zeiten!

$$\Delta_1 = 11.352778 \text{ Tage}, \Delta_2 = 128.172223 \text{ Tage}$$

Daraus ergibt sich für die zugehörigen Zentralwinkel

$$\varphi_1 = 10.2^\circ, \varphi_2 = 115.7^\circ$$

- (c) Nun lassen sich die Entfernungen \mathbf{d}_1 und \mathbf{d}_2 berechnen oder in der Zeichnung ausmessen:

$$\mathbf{d}_1 = 4.08 \mathbf{AE}, \mathbf{d}_2 = 5.57 \mathbf{AE}$$

- (d) Die Zunahme der Entfernung $\Delta \mathbf{d}$ beträgt also

$$\Delta \mathbf{d} = 1.49 \mathbf{AE}$$

- (e) Für diese zusätzliche Entfernung benötigt das Licht die Zeit Δt_L . Seine Geschwindigkeit beträgt also

$$c = \frac{\Delta \mathbf{d}}{\Delta t_L} = 0.129 \frac{\mathbf{AE}}{\text{min}}$$

10. Ist die Größe der Astronomischen Einheit bekannt ($1 \mathbf{AE} = 150\,000\,000 \text{ km}$), dann kann aus diesem Ergebnis die absolute Lichtgeschwindigkeit abgeleitet werden:

$$c = 323000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

³In diesem Bezugssystem beträgt die Umlaufzeit der Erde um die Sonne gerade eine synodische Umlaufzeit von Jupiter!

⁴Von Norden aus betrachtet bewegt sich die Erde im entgegengesetzten Umlaufsinn um die Sonne herum.

Heute, da man die Lichtgeschwindigkeit bereits auf einem Labortisch messen kann, die Astronomische Einheit aber immer noch sehr schwierig zu bestimmen ist, liegt es näher, mit Hilfe der Io-Verfinsterungen aus dem bekannten Wert für die Lichtgeschwindigkeit ($c = 300\,000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$) die Größe der Astronomischen Einheit abzuleiten:

$$1AE = 139000000km$$

5 Beobachtbare Io-Verfinsterungen 1997

Datum	Mez	Art	jul. Datum -2450000	dt[Tage]	Anzahl der Umläufe	T_i [Tage]
25. 3.	5.19	VA	532.679861	38.934722	22	1.769760
3. 5.	3.45	VA	571.614583	38.934028	22	1.769729
11. 6.	2.10	VA	610.548611	15.927778	9	1.769753
27. 6.	0.26	VA	626.476389	7.079167	4	1.769792
4. 7.	2.20	VA	633.555556	8.848611	5	1.769722
12. 7.	22.42	VA	642.404167	7.079166	4	1.769792
20. 7.	0.36	VA	649.483333	7.079167	4	1.769792
27. 7.	2.30	VA	656.562500	1.770139	1	1.770139
28. 7.	20.59	VA	658.332639			
9. 8.	15.00	Opposition	670.083333			
20. 8.	23.28	VE	681.436111			
28. 8.	1.22	VE	688.515278	7.079167	4	1.769792
29. 8.	19.51	VE	690.285417	1.770139	1	1.770139
5. 9.	21.45	VE	697.364583	7.079167	4	1.769792
12. 9.	23.40	VE	704.444444	7.079861	4	1.769965
21. 9.	20.04	VE	713.294444	8.850000	5	1.770000
28. 9.	21.59	VE	720.374306	7.079861	4	1.769965
7.10.	18.23	VE	729.224306	8.850000	5	1.770000
14.10.	20.18	VE	736.304167	7.079861	4	1.769965
21.10.	22.13	VE	743.384028	7.079861	4	1.769965
30.10.	18.38	VE	752.234722	8.850694	5	1.770139
6.11.	20.33	VE	759.314583	7.079861	4	1.769965
15.11.	16.57	VE	768.164583	8.850000	5	1.770000
22.11.	18.53	VE	775.245139	7.080556	4	1.770139
8.12.	17.12	VE	791.175000	15.929861	9	1.769985
15.12.	19.08	VE	798.255556	7.080556	4	1.770139