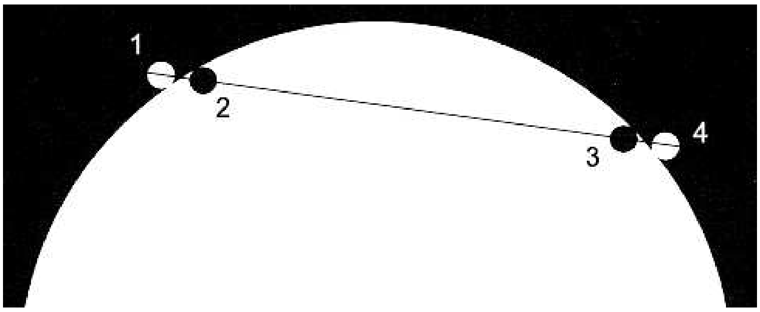
Messung der Astronomischen Einheit durch Messung von Kontaktzeiten bei einem Venustransits

(mit Lösungen)



Die vier Kontakte von Venus mit dem Sonnenrand

1 Einleitung

Aufgrund eines Vorschlages von Edmund Halley spielten die vier Venustransits des 18. und 19. Jahrhunderts eine bedeutende Rolle in der genauen Bestimmung des Abstands zwischen Sonne und Erde, der so genannten Astronomischen Einheit. Wenn ein solcher Transit von verschiedenen Orten der Erde aus beobachtet wird, sieht er etwas unterschiedlich aus und geschieht zu etwas verschiedenen Zeiten – ein Hinweis darauf, dass aus etwas unterschiedlichen Richtungen zu Venus und Sonne geblickt wird. Die genaue Registrierung der Differenzen und ihre Auswertung macht es möglich, den Parallaxenwinkel zu bestimmen und daraus die Entfernung zur Sonne abzuleiten.

Halley's Vorschlag bestand darin, von weit entfernten Orten auf der Erde aus die Dauer des gesamten Transits zu messen. Unterschiedliche Zeitdauern weisen auf verschieden lange „Wege“ der Venus über die Sonne hin – und damit auf verschiedene Abstände der Sehnen vom Mittelpunkt der „Sonnenscheibe“. Aus dem Abstand der beiden Sehnen lässt sich auf ihren (Winkel-) Abstand schließen. Der Nachteil von Halley's Methode besteht darin, dass für die Beobachtung nur Orte geeignet sind, von denen aus der Transit in seiner ganzen Länge beobachtet werden kann. Dem französischen Astronomen de l'Isle gelang es, das Verfahren so zu verallgemeinern, dass die Sonnenentfernung bereits aus dem Vergleich der beobachteten Zeitpunkte für denselben Kontakt abgeleitetet werden kann.

Im 18. und 19. Jahrhundert unternahmen die besten Astronomen der Welt weite Exkursionen, um mit ihren Beobachtungen und Messungen bei einem Venustransit zu einer genauen Bestimmung der Astronomischen Einheit beizutragen. Die Messungen erwiesen sich als schwieriger, die Ergebnisse als ungenauer als erwartet. Die Auswertungen dauerten deshalb mehrere Jahre.

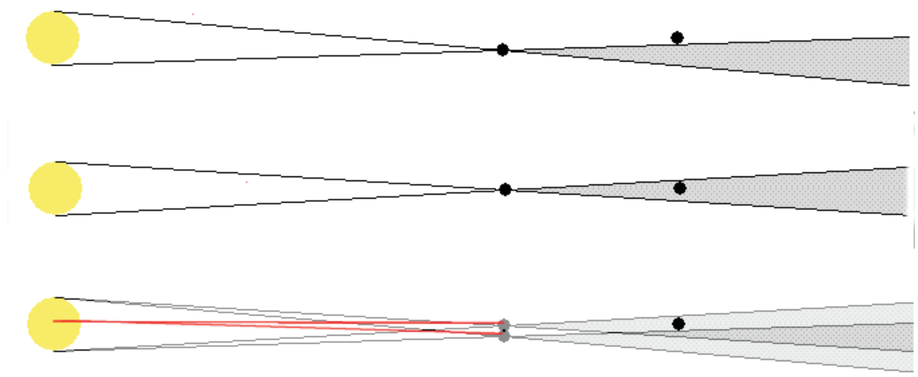


Abbildung 1: Beim Venustransit ergibt sich zu einer bekannten Bogenlänge, dem Durchmesser der Erde, ein aus der Durchgangszeit berechenbarer Winkel (rot hervorgehoben).

Die Venustransits dieses Jahrhunderts haben in den Jahren 2004 und 2012 stattgefunden. Sie boten Gelegenheiten, per Internet Kontakte zwischen Beobachtern auf der ganzen Erde herzustellen und die Ergebnisse, gemessene Kontaktzeiten und Fotos, unmittelbar zu sammeln und auszuwerten. 2012 initiierte die Arbeitsgruppe Didaktik der Physik der Universität Duisburg Essen zwei Projekte zur Beobachtung und Auswertung des Venustransits[1]. Mit dem Kontaktzeit-Projekt wurde ein Projekt wiederholt, das die ESO (European Southern Observatory) 2004 in großem Stil organisiert und an dem sich auch die Universität Essen beteiligt hatte. Da 2012 die Bedingungen für Beobachter in Europa sehr viel schwieriger waren, weil nur früh morgens der letzte Teil des Transits beobachtet werden konnte und der Himmel an vielen Orten nur kurze Blicke auf Sonne und Venus zuließ, beteiligten sich weniger Beobachter als erhofft. Trotzdem war das Projekt schließlich erfolgreich.

In dieser Aufgabe sollen das Prinzip und einige Details des Verfahrens anhand der Messergebnisse für den 3. Kontakt erarbeitet werden.

2 Etwas Theorie

2.1 Die Grundidee

Die Messung der Astronomischen Einheit durch Kontaktzeitmessungen beim Venustransit beruht auf folgender Grundidee: Im Sonnensystem sind alle Winkel und alle Winkelgeschwindigkeiten bekannt. Dadurch können alle Entfernungsverhältnisse berechnet werden. Für die Größe des Sonnensystems fehlte jedoch der Maßstab. Gelingt es, bei nur einem Planeten zu einem Zentralwinkel bei der Sonne die zugehörige Bogenlänge zu messen, dann kennt man seine Entfernung zur Sonne – und damit alle Entfernungen.

Bei einem Venustransit wird die Erde von dem Schatten getroffen, den Venus bei ihrem Umlauf um die Sonne in den Weltraum wirft. Wenn eine Schattenkante die Erde

[1] http://www.venus2012.de

zum Zeitpunkt t_1 zum ersten Mal trifft (z. B. Beginn des 1. Kontakts, Abb. 1, oben) und zum Zeitpunkt t_2 die Erde ganz überstrichen hat (z. B. Ende des 1. Kontakts, Abb. 1, Mitte), dann hat der Schatten in der Zwischenzeit auf der Erde die Strecke $\Delta d = 2r_E$ zurückgelegt. Der zugehörige Zentralwinkel ist der Winkel $\varepsilon_V = \omega_{syn}(t_2 - t_1)$, den die Venus in dieser Zeit *relativ zur Erde* weiter um die Sonne gelaufen ist (in Abb. 1, unten, rot hervorgehoben):

$$\varepsilon_V = \omega_{syn}\Delta t_{ges} = \frac{\Delta d}{d_E} = \frac{2r_E}{d_E} \tag{1}$$

Dabei sind r_E der Radius der Erde, d_E der Abstand der Erde von der Sonne und $\omega_{syn} = \omega_{Venus} - \omega_{Erde}$ die synodische Winkelgeschwindigkeit der Venus relativ zur Erde[2].

Wenn es gelingt, $\Delta t_{ges} = t_2 - t_1$ zu messen, kann der Abstand d_E zwischen Erde und Sonne berechnet werden:

$$\boldsymbol{d_E = \frac{\Delta d}{\omega_{syn}\Delta t_{ges}} = \frac{2r_E}{\omega_{syn}\Delta t_{ges}}} \tag{2}$$

2.2 Verfeinerungen

2.2.1 Berücksichtigung der Neigung der Venusbahn

Da die Venusbahn gegen die Ekliptik geneigt ist, streicht der Venusschatten, anders als bisher angenommen, nicht zentral über die Erde hinweg (Abb. 2). Dadurch dauert es länger, bis die Schattenkante die Erde überstrichen hat, und der von der Venus in der Zwischenzeit überstrichene Zentralwinkel wird größer.

Der Zusammenhang zwischen der Zeitdifferenz Δt_{ges} und dem Abstand d_E zwischen Erde und Sonne wird dadurch etwas komplizierter. Es lässt sich zeigen (s. Gleichung (7) im Anhang, S. 12), dass die Schattenkante im Allgemeinen statt $\Delta d = 2r_E$ sich um den folgenden Bogen weiterbewegt[3]:

$$\Delta d = \frac{2r_E}{\sqrt{1-p^2}} \tag{3}$$

Dabei ist p das Verhältnis aus dem kleinsten Abstand zwischen Schattenmitte und Erde und dem Radius des Venusschattens.

Damit lässt sich (2) verallgemeinern zu

$$\boldsymbol{d_E = \frac{2r_E}{\omega_{syn}\Delta t_{ges}\sqrt{1-p^2}}} \tag{4}$$

[2]Das ist die Winkelgeschwindigkeit, die Venus im dem rotierenden Bezugssystem hat, in dem Sonne und Erde ruhen.

[3]siehe auch Abb. 5, S. 12

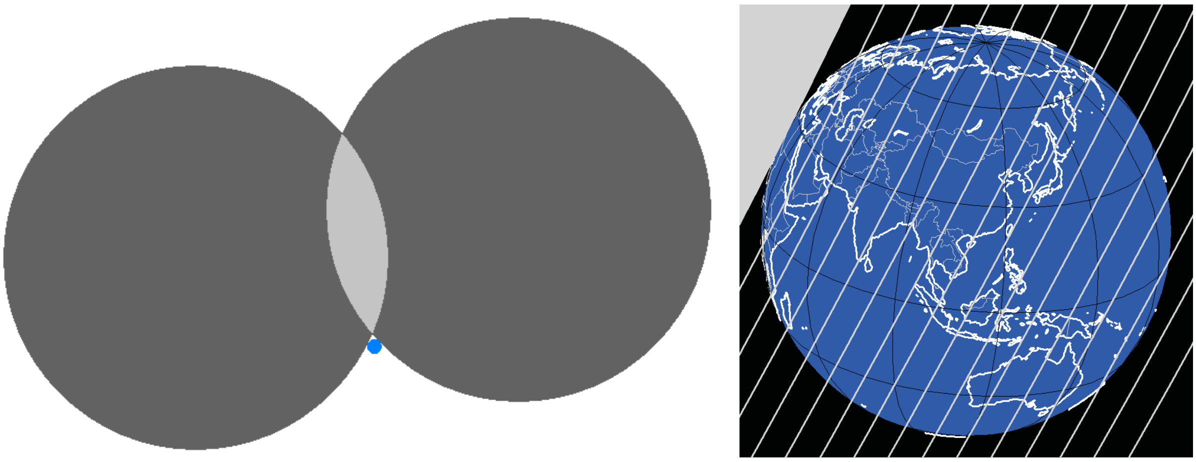


Abbildung 2: Von der Sonne aus gesehen überholt der Schatten der Venus die Erde von rechts nach links. Der Venusschatten trifft dabei die Erde exzentrisch (links). Die Linien im Bild rechts markieren die Schattenpositionen am Ende des Transits in Abständen von einer Minute.

2.3 Messung der Durchgangszeit Δt_{ges}

Die Zeitdauer Δt_{ges} des Schattendurchganges kann nicht direkt gemessen werden, weil an den entsprechenden Orten auf der Erde die Sonne gerade auf- bzw. untergeht, also direkt am Horizont steht. Deshalb muss aus dem Unterschied der an weit auseinander liegenden Orten gemessenen Kontaktzeiten die Gesamtzeit des Schattendurchlaufs abgeleitet werden.

Allerdings ist im Allgemeinen der Vergleich zweier Einzelmessungen nicht genau genug. Es ist deshalb besser, den Moment des Schattendurchganges an möglichst vielen Orten auf der Erde zu messen. Trägt man dann die Ergebnisse in geeigneter Weise in ein Diagramm, ergibt sich eine Gerade, aus deren Steigung sich die Durchgangszeit berechnen lässt.

Um einen linearen Zusammenhang zu erhalten, werden folgende Idealisierungen gemacht:

1. Während der ca. 15 Minuten des Schattendurchganges wird von der Erddrehung abgesehen.

2. Die Schattenfront wird als geradlinig angenommen, obwohl sie natürlich kreisförmig ist. Allerdings ist dieser Kreis mehr als 40-mal so groß wie die Erde. Tatsächlich wurde die Abbildung 2 rechts mit maßstabsrichtigen Schattenkreisen gezeichnet.

3 Benötigte Hilfsmittel

- Geodreieck und Taschenrechner
- Abbildungen 3, S. 10, und 4, S. 11
- für die Auswertung am Computer evtl. zusätzlich
  - Abbildungen 3 (`StationsAuswmitNr.jpg`) und evtl. 4 (`StationsAuswgedrehtmitNr.jpg`) als jpg-Datei
  - Exceltabelle `Stations3Ausw.xls` und `Stations3AuswmitLoesung.xls` mit Beobachtungsorten, geografischen Koordinaten und Kontaktzeiten ausgewählter Beobachter
  - die Originaldaten und Utilities des Internetprojekts:
    * Messergebnisse Kontakt 3 `daten3.txt`[4]
    * Auswertungstabelle `evaluationofcontacttimes3+4.xls`[5] und `evaluationofcontacttimes3+4_2012-09-04.xls`, die die vollständigen Beobachtungsdaten enthält

Alle Dateien sind auch als zip-Archiv **MaterialContacttimes.zip** verfügbar.

[4] `http://www.venus2012.de/participants/daten3.txt`
[5] `http://www.venus2012.de/stuff/evaluationofcontacttimes3+4.xls`

4 Aufgaben (mit Lösung)

Im Folgenden sollen die Zeiten ausgewertet werden, die einige Teilnehmer des Projekts für den 3. Kontakt gemessen und an die Projektseite[6] übermittelt haben.

Nr	Ort	geogr. Breite	geogr. Länge	UT in hh:mm:ss
1	Soldotna, Alaska	60.5	-151.0	04:31:10
2	Arnsdorf bei Dresden	51.1	14.0	04:37:35
3	Galati, Reggio Calabria, Italy	37.9	16.1	04:38:05
4	Shiraz, Iran	52.3	29.4	04:36:55
5	Reunion Island	-20.9	55.5	04:35:30
6	Mauna Loa, Hawaii	19.5	-155.6	04:27:58
7	Canberra, Australien	-35.2	149.1	04:26:46
8	Tromsø, Norwegen	69.6	19.0	04:35:58

Aufgabe 1 Die synodische Winkelgeschwindigkeit der Venus

Die letzten beiden Transits der Venus fanden statt am 8. Juni 2004 um 8:25 UT und am 6. Juni 2012 um 1:29 UT (Mitte der Transits). In der Zwischenzeit hatte Venus viermal in unterer Konjunktion mit der Sonne gestanden[7]. Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Information zunächst die synodische Umlaufzeit T_{syn} der Venus in Tagen. Leiten Sie aus dem Ergebnis die synodische Winkelgeschwindigkeit ω_{syn} der Venus in $''/min$ und in rad/min[8] ab.

Lösung:

$$\begin{aligned} T_{syn} &= \frac{8a}{5} = 1.6a \quad (\textit{genauer: } T_{syn} = \frac{(6084.520 - 3164.809)d}{5} = 583.94d) \\ \Longrightarrow \quad \omega_{syn} &= \frac{360°}{1.6a} = \frac{225°}{a} = \frac{1.54''}{min} = 7.45 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

Aufgabe 2 Leiten Sie aus den in Galati und Canberra gemessenen Kontaktzeiten die Entfernung zur Sonne ab.

1. Messen Sie dazu zunächst in Abbildung 3 den Abstand der beiden Orte senkrecht zur Richtung der Schattenkante, die zum Zeitpunkt des Kontaktendes in die Abbildung eingezeichnet ist, und den Durchmesser der Erde.

   Lösung: *Am Computer ergeben sich anhand des digitalisierten Bildes, das so gedreht wurde, dass die Schattenkante parallel zur unteren Bildkante verläuft (Abb. 4) die folgenden Abstände:*

   - *Galati: 17 Pixel*
   - *Canberra: 618 Pixel*

[6] `http://www.venus2012.de/php/view_table3.php`

[7] In der unteren Konjunktion überholt Venus gerade die Erde bei ihrem Umlauf um die Sonne und ist der Erde besonders nahe.

[8] Diese Einheit ist für die folgenden Rechnungen bequem.

- *Erddurchmesser: 713-17=696 Pixel*

2. Berechnen Sie aus Ihren Ergebnissen zunächst die Geschwindigkeit $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ der Schattenkante auf der Erde und dann die Zeit Δt_{ges}, die die Schattenkante zum Überstreichen der ganzen Erde benötigt.

   Lösung: *(Die Rechnungen befinden sich auch in der Excel-Tabelle* `Stations3AuswmitLoesung.xls`*.)*

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x}{r_E} &= 2\frac{618-17}{696} = 1.732 \\ \Delta t &= 11:19 min \\ \Longrightarrow \quad v_{SchK} &= \frac{\Delta x}{\Delta t} = 0.153\frac{r_E}{min} \\ \Longrightarrow \quad \Delta t_{ges} &= \frac{2r_E}{v_{SchK}} = 13.10 min \end{aligned}$$

3. Schätzen Sie aus Ihrem Ergebnis einen Näherungswert für die Sonnenentfernung ab, indem Sie die Bahnneigung der Venus vernachlässigen und Gleichung (2) verwenden.

   Lösung:

$$\left.\begin{aligned} \omega_{syn}\Delta t_{ges} &= 20.83'' \\ \Delta d &= 2r_E \end{aligned}\right\} \quad \Longrightarrow \quad d_{E_0} = \frac{2r_E}{\omega_{syn}\Delta t_{ges}} = 19300 r_E$$

4. Leiten Sie einen besseren Wert für die Sonnenentfernung ab, indem Sie berücksichtigen, dass der Venusschatten die Erde nicht zentral trifft.

   Information: Mit Hilfe genauer Ephemeridenrechnung kann das in Gleichung (4) enthaltene Verhältnis p berechnet werden: $\boldsymbol{p = 0.5904}$.

$$d_E = \frac{d_{E_0}}{\sqrt{1-p^2}} = 23930 r_E$$

Aufgabe 3 Ausgleichsrechnung durch Linearisierung aller Messergebnisse

In dieser Teilaufgabe soll versucht werden, das aus zwei Einzelmessungen gewonnene Ergebnis zu verbessern, indem alle Messergebnisse berücksichtigt werden.

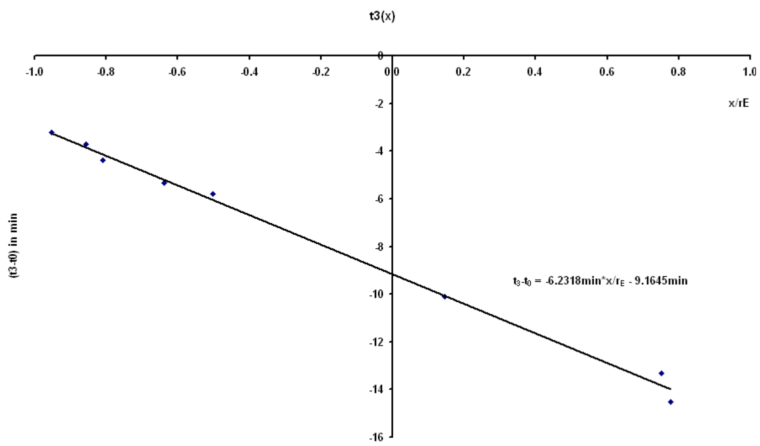
1. Statt obige Rechnung für alle Kombinationen von Messergebnissen zu wiederholen, messen Sie zunächst in Abbildung 3 den Abstand aller Beobachtungsorte vom Erdrand in Richtung senkrecht zur Schattenkante aus und berechnen Sie für alle Orte die Zeitdifferenz zum Messwert eines willkürlich ausgewählten Ortes und den senkrechten Abstand Δx zu diesem Ort.

   Lösung: *Ich habe die Zeitdifferenz zur (eigentlich noch unbekannten) Endzeit T_{Ende} des Kontaktes und die Abstände der Orte von der Schattenkante verwendet: $T_{Ende} = 4:41:17 UT$*

Nr.	Abstand in Pixeln	$\Delta x/R_E$	Δt in min
1	712-313=399	0.573	-10.11
2	712-662=50	0.072	-3.70
3	712-695=17	0.024	-3.20
4	712-646=66	0.095	-4.36
5	712-539=173	0.249	-5.78
6	712-103=609	0.875	-13.31
7	712-94=618	0.888	-14.51
8	712-586=126	0.181	-5.31

2. Tragen Sie die Zeitdifferenzen Δt_i über den senkrechten Abständen Δx_i in ein Diagramm ein. Zeichnen Sie nach Augenmaß eine Ausgleichsgerade, bestimmen Sie ihre Steigung und berechnen Sie daraus die Durchlaufzeit Δt_{ges} der Schattenkante.

   Lösung:



$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = -6.232\frac{min}{r_E}$$

$$\Longrightarrow \quad \Delta t_{ges} = \frac{2r_E}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = 12.46min$$

3. Berechnen Sie aus der so bestimmten Durchlaufzeit Δt_{ges} zunächst mit (2) einen Näherungswert und dann mit (4) einen verbesserten Wert für die Entfernung zur Sonne.

   Vergleichen Sie das so erhaltene Ergebnis mit dem in Aufgabe 2 gefundenen Einzelergebnis.

   Lösung:

$$\omega_{syn}\Delta t_{ges} = 19.82''$$

$$\Longrightarrow \quad d_{E_0} = 21491 r_E$$

$$\Longrightarrow \quad d_E = \frac{d_{E_0}}{\sqrt{1-p^2}} = 26627 r_E$$

Leider wird in diesem Fall das Gesamtergebnis schlechter als das Einzelergebnis!

Aufgabe 4 Korrigieren Sie Ihre in den Aufgaben 2 und 4 erhaltenen Ergebnisse für die Entfernung zur Sonne mit dem genauen Wert der monentanen Winkelgeschwindigkeit der Venus.

Der genaue Wert der Winkelgeschwindigkeit am Tag des Transits unterscheidet sich von dem in Aufgabe 1 berechneten Wert[9]:

$$\omega_{syn} = \frac{1.68''}{min} \tag{5}$$

Lösung:

- *Galati - Canberra:* $d_E = 21940rE \quad \Longrightarrow \quad \pi_S = 9.4''$
- *alle Orte:* $d_E = 24409r_E \quad \Longrightarrow \quad \pi_S = 8.5''$

Aufgabe 5 (Zusatzaufgabe)

1. Werten Sie alle bei dem Internetprojekt eingegangenen Kontakt-3-Zeiten[10] mit den Werkzeugen des Internetprojektes[11]
2. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem auf der „Results"-Seite[12] veröffentlichten „offiziellen" Ergebnis für den 3. Kontakt.
   Lösung: $d_E = 148990000km, \pi_S = 8.83''$)

[9]berechnet aus der Veränderung der Venusposition zwischen 3.30 UT und 5.30 UT

[10]Sie finden sie unter `http://www.venus2012.de/php/datacontacttimes.php`.

[11]Sie finden die geeignete Excel-Tabelle auf der „Stuff"-Seite (`http://www.venus2012.de/stuff/stuff.php`) aus.

[12]`http://www.venus2012.de/venusprojects/contacttimes/resultscontacttimes.php`

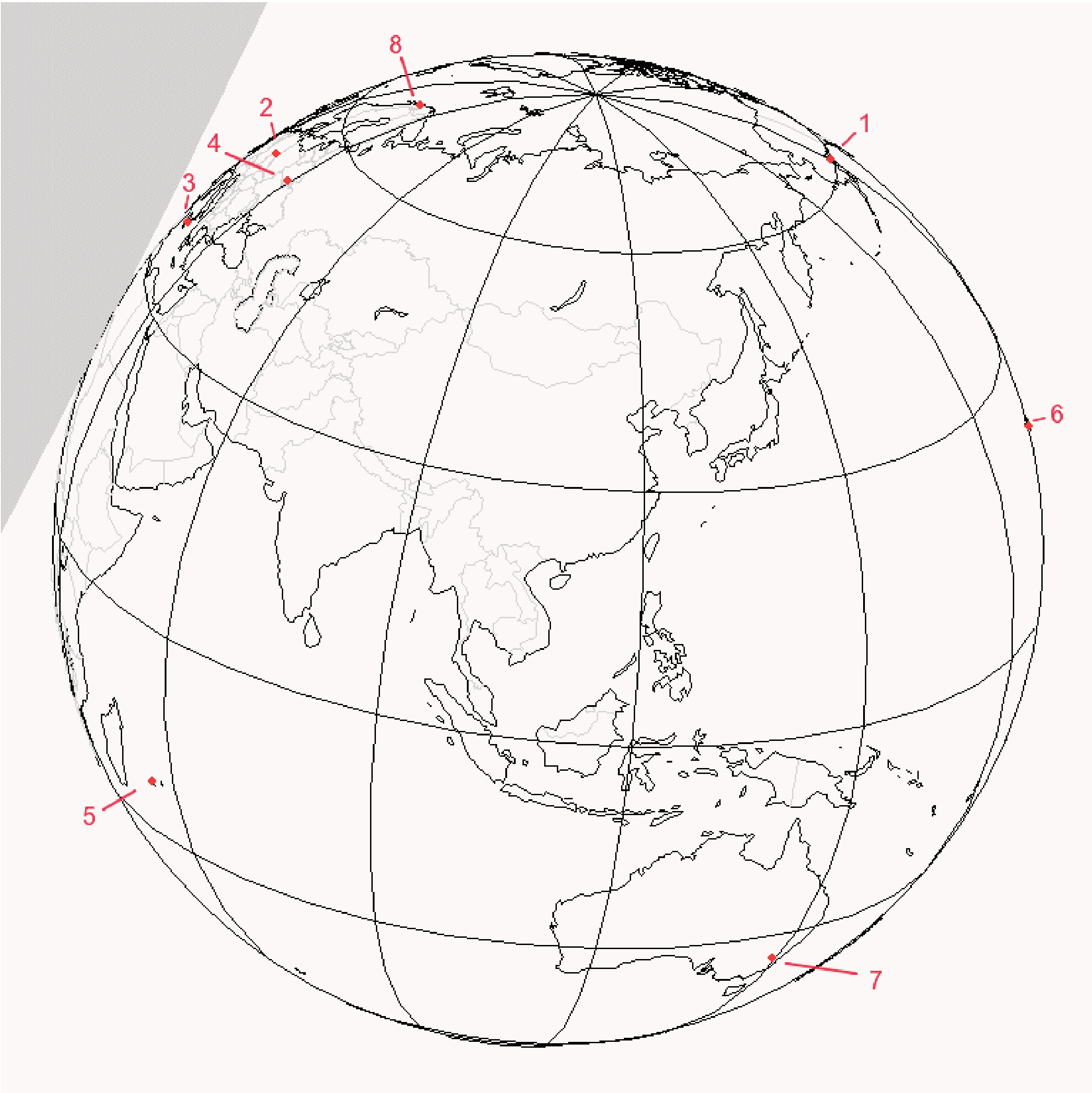


Abbildung 3: Die Tagseite der Erde am Ende von Kontakt 3

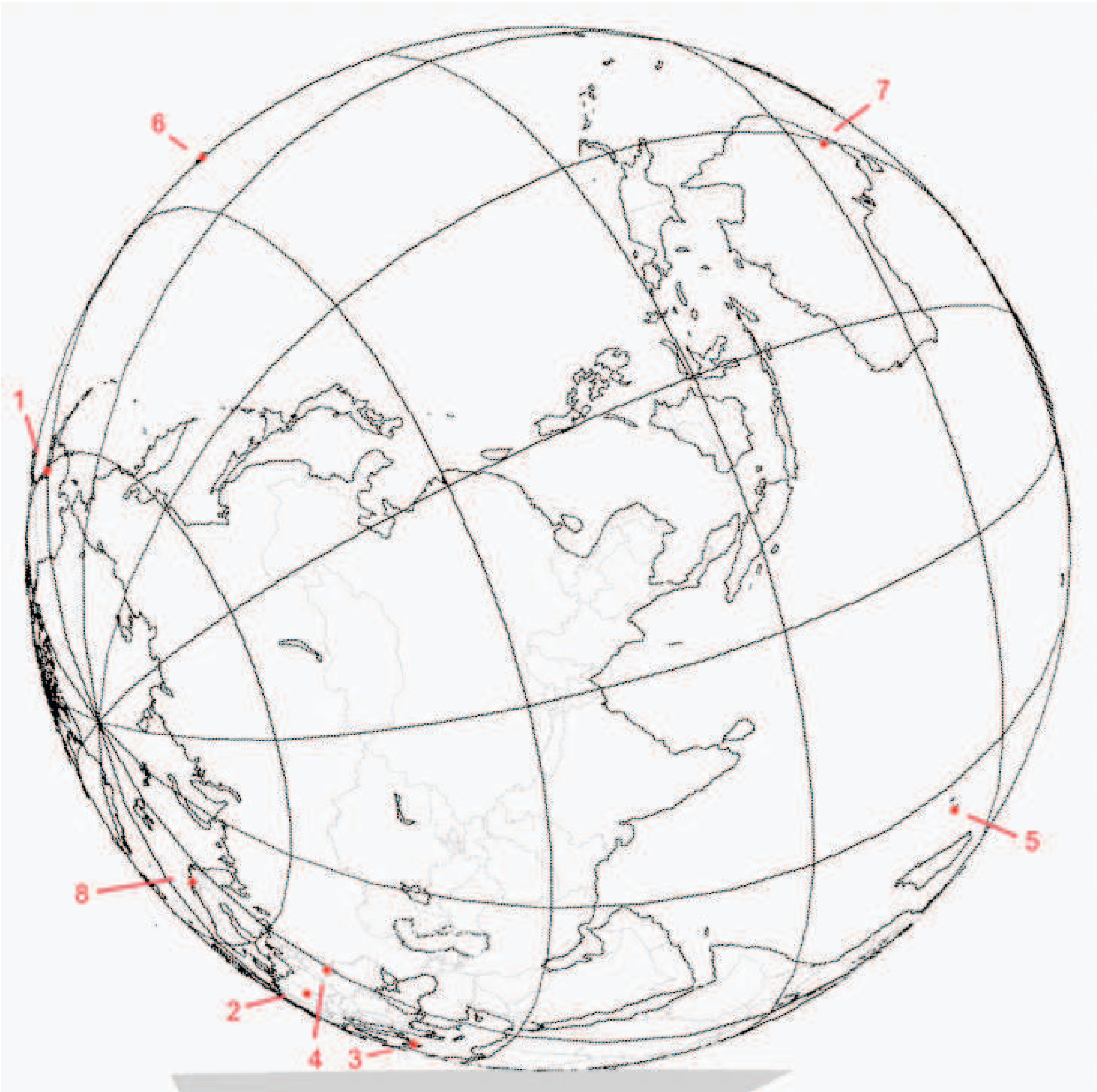


Abbildung 4: Die Tagseite der Erde am Ende von Kontakt 3. Das Bild ist so gedreht, dass die Schattenkante parallel zur unteren Bildkante verläuft.

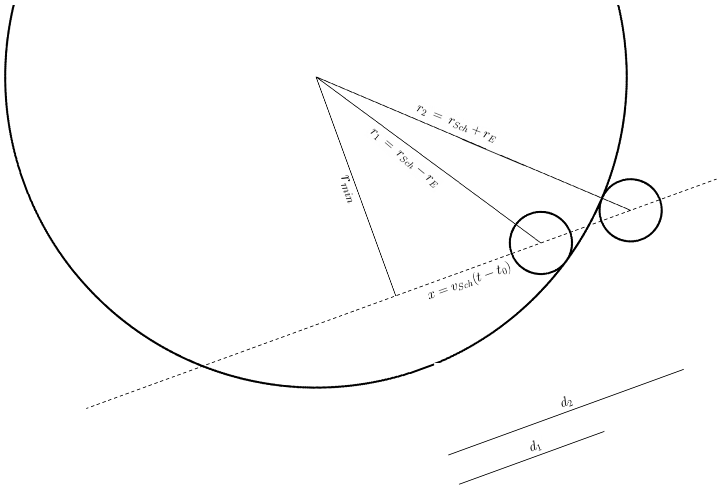


Abbildung 5: Perspektivwechsel: Die Erde tritt in den Venusschatten ein.

5 Anhang: Die während der Durchlaufzeit Δt_{ges} einer Schattenkante überstrichene Bogenlänge Δd

Ändert man die Perspektive und betrachtet die Wanderung der Erde durch den Schatten der Venus (Abb. 5), dann bewegt sich die Erde, während sie ganz von der Schattenkante überstrichen wird, von Position 1 nach Position 2. Mit Hilfe der Ephemeridenrechnung lassen sich anhand von Abbildung 5 – ohne Kenntnis der Astronomischen Einheit! – berechnen:

- der Radius des Venusschattens im Abstand der Erde von der Sonne r_{Sch} in AE,
- der Minimalabstand r_{min} zwischen der Erde und dem Schattenmittelpunkt in AE und
- die Geschwindigkeit v_{Sch}, mit der sich Erde und Schatten relativ zueinander bewegen, in AE/min.

Nicht bekannt dagegen ist zunächst das Größenverhältnis zwischen Venusschatten und Erde. Wenn jedoch die Zeit Δt_{ges} gemessen wird, die die Erde benötigt um von 1 nach 2 zu kommen – In dieser Zeitspanne wandert der Schattenrand ganz über die Erde! –, dann ist der Abstand

$$\Delta d = d_1 - d_2 = v_{Sch} \Delta t_{ges}$$

in AE bekannt. Daraus lässt sich folgendermaßen die Größe der Erde in AE, d. h. die Sonnenparallaxe, berechnen:

$$\begin{aligned} r_1 = r_{Sch} - r_E \quad &\wedge \quad r_2 = r_{Sch} + r_E \\ d_1^2 = r_1^2 - r_{min}^2 \quad &\wedge \quad d_2^2 = r_2^2 - r_{min}^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad d_1^2 - d_2^2 &= r_1^2 - r_2^2 \\
\Longrightarrow \quad (d_1 + d_2)(d_1 - d_2) &= (r_1 + r_2)(r_1 - r_2) = 2r_{Sch} \cdot 2r_E \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Da die Erde viel kleiner ist als der Venusschatten[13], kann näherungsweise gesetzt werden:

$$
d_1 + d_2 \approx 2d = 2\sqrt{r_{Sch}^2 - r_{min}^2} = 2r_{Sch}\sqrt{1-p^2} \qquad \text{mit} \qquad p = \frac{r_{min}}{r_{Sch}}
$$

Damit folgt aus (6)

$$
\begin{aligned}
r_{Sch}\sqrt{1-p^2}\Delta d &= 2r_{Sch}r_E \quad \Longrightarrow \\
\Delta d &= \frac{2r_E}{\sqrt{1-p^2}} \qquad (7)
\end{aligned}
$$

[13]Das war bereits vor der genauen Kenntnis der Astronomischen Einheit bekannt.