Eigenbewegung und Parallaxe von Barnards Pfeilstern
(mit Lösungen)

1 Einleitung

Der Parallaxeneffekt ist jedem, z.B. vom Auto- oder Bahnfahren, bekannt: Die Gegenstände der Umgebung scheinen sich in der entgegengesetzten Richtung zu bewegen, und zwar umso schneller, je näher sie sind.

Seit der Ausarbeitung des heliozentrischen Weltsystems durch Copernicus Mitte des 16. Jahrhunderts war klar, dass sich die Bewegung der Erde um die Sonne am Fixsternhimmel widerspiegeln müsste, entweder als kollektive (scheinbare) Bewegung aller Sterne oder, bei unterschiedlicher Entfernung der Sterne, als gegenseitige Verschiebung. Die Nichtbeobachtbarkeit dieses Effektes war zunächst ein starkes Argument gegen Copernicus' Theorie.

Es dauerte fast 300 Jahre, bis Bessel die erste zweifelsfreie Beobachtung und Messung einer Fixsternparallaxe an 61 Cygni gelang. Bis dahin hatte dieses Problem die Weiterentwicklung der Beobachtungs- und Instrumententechnik entscheidend vorangetrieben. Als Bessel 1838 als erster erfolgreich war, war die Entwicklung so weit fortgeschritten, dass mehrere Fixsternparallaxen nahezu gleichzeitig vermessen werden konnten ([2]).

2 Etwas Theorie

Die jährliche Bewegung der Erde um die Sonne führt zu einer parallaktischen Bewegung eines nahen Sternes relativ zu den sehr viel weiter entfernten Nachbarsternen. Diese Bewegung bildet, bei als kreisförmig angenommener Erdbahn, bei einem Stern nahe einem der Pole der Ekliptik einen Kreis, bei einem Stern in der Ekliptikebene ist sie geradlinig (s. Abb. 1). Bei allen sonstigen Positionen durchläuft der Stern eine mehr oder weniger exzentrische Ellipse.

Der Zusammenhang zwischen der ekliptikalen Position (λ, β) eines Sternes, seiner parallaktischen Verschiebung $(\Delta\lambda, \Delta\beta)$ und der ekliptikalen Länge λ_S der Sonne ist gegeben durch (siehe z.B. [3], S. 219)

$$\cos\beta\Delta\lambda = \Pi\sin(\lambda_S - \lambda) \qquad (1)$$

$$\Delta\beta = -\Pi\sin\beta\cos(\lambda_S - \lambda) \qquad (2)$$

Dabei ist Π die sogenannte Parallaxe des Sternes, der Winkel also, unter dem vom Stern aus der Radius der Erdbahn erscheint.

Gleichungen (1) und (2) bilden die parametrisierte Darstellung der in Abb. 2 dargestellten Ellipse. Der Stern durchläuft sie im Laufe eines Jahres einmal, während aufgrund

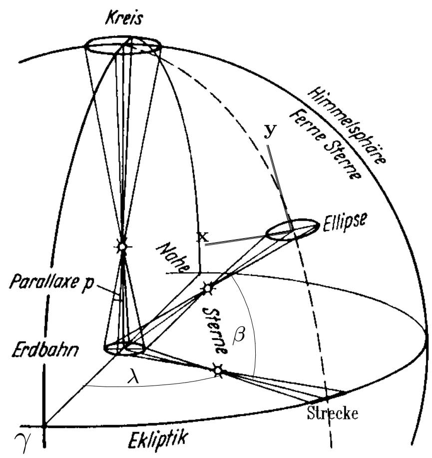

Abbildung 1: Parallaktische Bewegung naher Fixsterne (nach [4], S. 133)

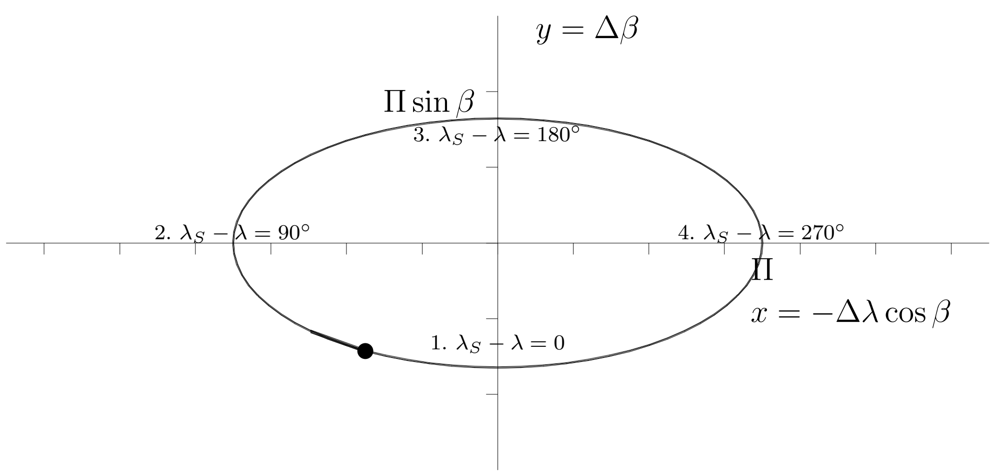

Abbildung 2: Bewegung auf der parallaktischen Ellipse

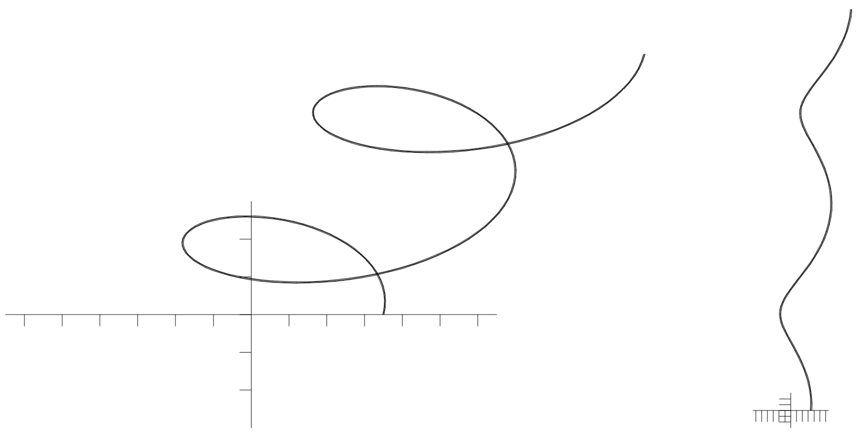

Abbildung 3: Überlagerung der parallaktischen Ellipse mit verschieden großen Eigenbewegungen während des Ablaufes zweier Jahre

des Erdumlaufes die Sonne einmal auf der Ekliptik umläuft und sich ihre ekliptikale Länge entsprechend ändert (Frühlingsanfang: $\lambda_S = 0°$, Sommeranfang: $\lambda_S = 90°$, ...).

Die Gleichung der Ellipse erhält man, wenn man durch

$$x = -\Delta\lambda \cos\beta,\ \ y = \Delta\beta$$

ein (in Abb. 3 bereits angedeutetes) rechtwinkliges Koordinatensystem[1] einführt und Gleichungen (1) und (2) quadriert und addiert:

$$\frac{x^2}{\Pi^2} + \frac{y^2}{(\Pi \sin\beta)^2} = 1 \tag{3}$$

Normalerweise besitzen die Sterne eine Eigenbewegung, aufgrund derer sie sich geradlinig durch den Raum bewegen. Diese Eigenbewegung μ überlagert sich dann der parallaktischen Bewegung. Die Gestalt der zusammengesetzten scheinbaren Bahn am Himmel wird bestimmt vom Verhältnis μ/Π und der Richtung der Eigenbewegung relativ zu den Achsen der Ellipse: In Abbildung 3 ist links angenommen, dass die jährliche Eigenbewegung sowohl in λ, als auch in β ebenso groß ist wie die Parallaxe Π. Auf der rechten Seite ist die Eigenbewegung in β als zehnmal so groß angenommen worden.

3 benötigte Hilfsmittel

- Lineal mit Maßstab
- Taschenrechner

[1]Das Vorzeichen bei der Definition von x beruht auf dem Umlaufsinn von λ. Der Faktor $\cos\beta$ wird eingeführt, damit beide Achsen den gleichen Maßstab haben: Der (Breiten-) Kreis $\beta = const$ ist um den Faktor $\cos\beta$ kürzer als der (Längen-) Kreis $\lambda = const$.

Literatur

[1] E. Heiser, R. Schröder, *Eigenbewegung und Parallaxe von Barnards Pfeilstern*, Sterne und Weltraum 35/5, 388 (1996)

[2] D. B. Herrmann, *Kosmische Weiten, Johann Ambrosius Barth: Leipzig 1977*

[3] W. M. Smart, *Textbook on Spherical Astronomy*, Cambridge University Press, Cambridge 1986

[4] A. Unsöld, B. Baschek, *Der neue Kosmos*, Springer, Berlin usw. 1991

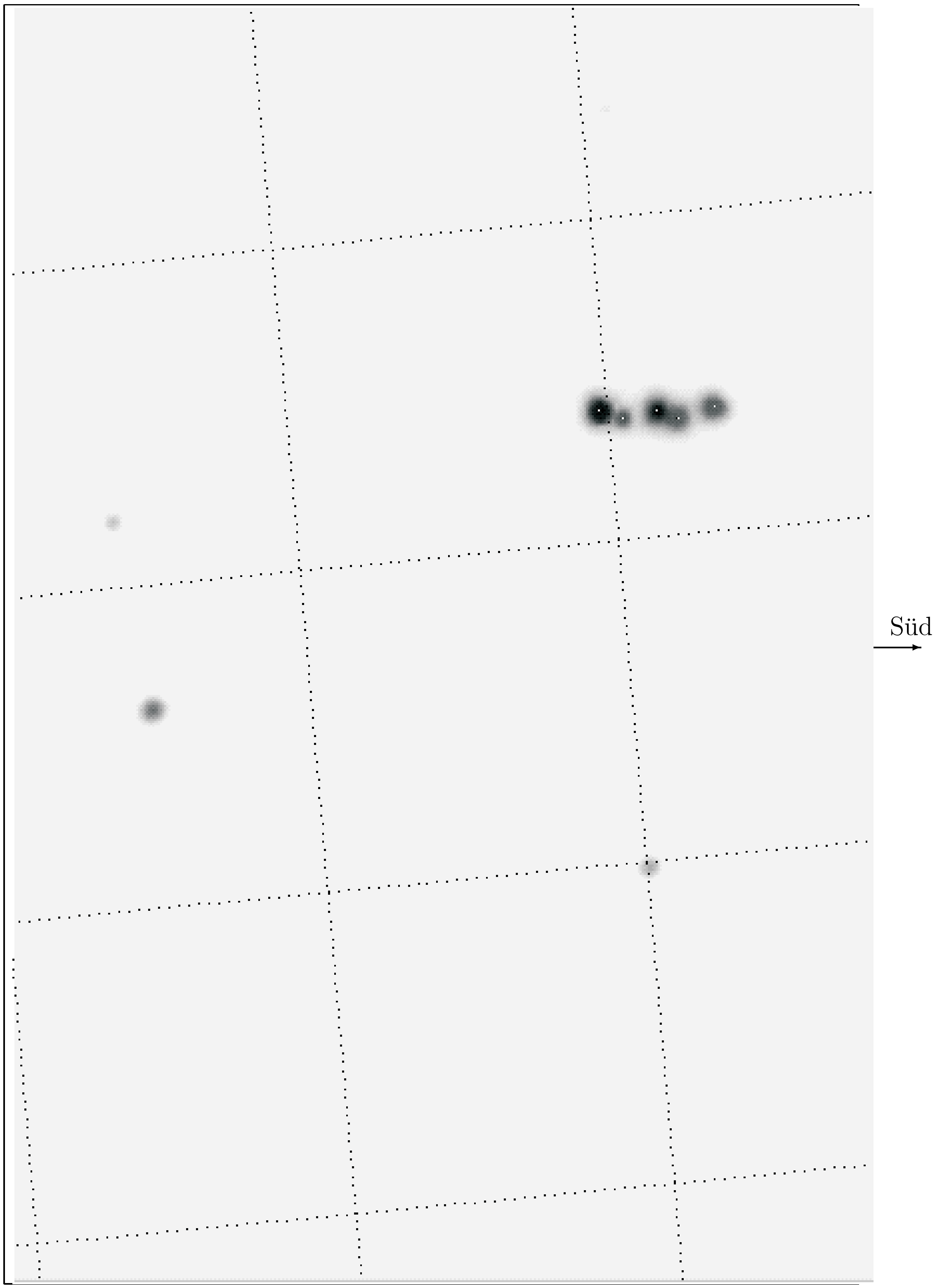

Abbildung 4: Überlagerung von 5 CCD-Aufnahmen von Barnards Stern

4 Aufgaben (mit Lösungen)

Heute kann die parallaktische Bewegung sehr naher Fixsterne bereits mit Amateurmitteln verfolgt werden. Wir benutzen hier die Überlagerung von 5 Aufnahmen (Abb. 4) von Barnards Pfeilstern ($\boldsymbol{\lambda = 269.37°, \beta = 28.12°}$), die E. Heiser an der Sternwarte auf dem Oldendorfer Berg aufgenommen hat ([1]). Der parallaktischen Ellipse ist bei diesem Stern eine sehr große („pfeilschnelle") Eigenbewegung überlagert.

Die folgenden astrometrischen Messungen werden normalerweise am Computer mit einem Astrometrie-Programm (z.B. **MiPS** oder **MIRA**) durchgeführt, mit dessen Hilfe es möglich ist, Sternpositionen subpixelgenau relativ zueinander auszumessen. Auf diese Weise kann die Position von Barnards Pfeilstern sehr genau relativ zu den viel weiter entfernten drei Sternen mit bekannter Position ausgemessen werden. Zur Vereinfachung sind hier in das Bild zusätzlich kleine weiße Punkte eingezeichnet, die die jeweilige Sternposition markieren.

1. Das benutzte Teleskop hatte eine Brennweite von 7450mm, der benutzte CCD-Chip hatte eine Größe von $8.6*6.5\text{mm}^2$.

   (a) Wie groß ist der auf dem Chip abgebildete Himmelsausschnitt ungefähr?

   $$\tan \Delta x = \frac{8.6}{7450} \quad \Longrightarrow \quad \Delta x \approx 4'$$

   *Der Bildausschnitt ist deshalb etwa 4'*3' groß.*

   (b) Abb. 4 zeigt fast die gesamte CCD-Aufnahme, der ein ekliptikales Koordinatennetz[2] überlagert ist. Welche Abstände haben dessen Linien zueinander?

   *Da das Bild etwa 4'*3' groß ist, beträgt der Linienabstand 1'.*

   (c) Welchen Winkelmaßstab hat also Abbildung 4?

   $$\textit{Der Maßstab beträgt } \frac{1'}{52mm} = 1.15''/mm.$$

2. Zu welchen Zeiten im Jahr (ungefähr) durchläuft Barnards Pfeilstern die mit 1., 2., ... bezeichneten Punkte der parallaktischen Ellipse in Abb. 2?

   Da $\lambda \approx 270°$ ist, durchläuft der Stern den Punkt 1. zu Winteranfang; die anderen Punkte jeweils ein Vierteljahr später.

   Zu Frühlingsanfang beträgt die ekliptikale Länge der Sonne $\lambda_S = 0°$, um dann um $90°$ im Vierteljahr zuzunehmen. $\Delta\beta = 0$ gilt, wenn $\cos(\lambda_S - \lambda) = 0$, also $\lambda_S = 0°, 180°$, also am 21. März und am 21. September. Entsprechend gilt $\Delta\lambda = 0$ am 21. Juni und am 21. Dezember.

3. Die Einzelaufnahmen stammen vom

   - 17. Oktober 1993 (im Süden),
   - 12. Mai 1994,
   - 22. September 1994,

[2] Das Netz ist leider etwas verschoben.

- 1. Mai 1995 und
- 10. Oktober 1995 (im Norden).

Die Aufnahmen vom 17.10.1993 und 10.10.1995 zeigen die Eigenbewegung des Sternes nahezu ohne parallaktische Verzerrung (Warum?). Bestimme die jährliche Eigenbewegung von Barnards Pfeilstern (Literaturwert: $\mu = 10.3''/a$)!

Der Abstand der beiden Bilder des Sternes beträgt in Abb. 3 18.8mm entsprechend 21.7". Die jährliche Bewegung beträgt also etwa 10.8".

4. Zur Messung der großen Halbachse der parallaktischen Ellipse können wir vereinfachend annehmen, am 1.5.1995 und am 10.10.1995 sei $\Delta\beta \approx 0$ (warum?).

   $\Delta\beta = 0$ *gilt etwa am 21.3. und 21.9. (s.o.).*

   (a) Bestimme unter dieser Voraussetzung die große Halbachse der Ellipse, und berechne daraus die Parallaxe des Sternes (Literaturangabe: $\Pi = 0.55''$)!

   Das Bild des Sternes vom 1.5.1995 hat von der Verbindungslinie der Bilder vom 17.10.1993 und 10.10.1995 in λ-Richtung einen Abstand von etwa 1.2mm entsprechend 1.4". Wenn dieser Abstand gerade der großen Achse der parallaktischen Ellipse entspricht, folgt

$$\Pi = \frac{1.4''}{2} \quad \Longrightarrow \quad \Pi = 0.7''$$

   (b) Wie groß ist demzufolge seine Entfernung

      i. in Astronomischen Einheiten?
      ii. in Kilometern?
      iii. in Lichtjahren?

$$\Pi = \frac{1AE}{d} \quad \Longrightarrow \quad d = \frac{1}{\Pi}AE = 300000AE = 4.5 \cdot 10^{13}km = 4.7Lj$$