

Der Sonnenlauf im Verlauf eines Jahres (mit Lösungen)

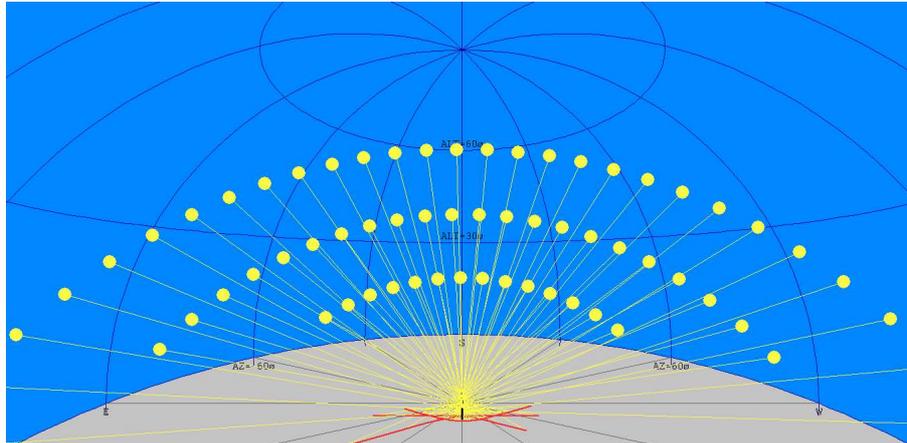


Abbildung 1: Die Bewegung der Sonne über den Himmel zu Winteranfang, Frühlingsanfang und Sommeranfang
(erzeugt mit dem Programm „Schattenspur“)

1 Einleitung

Der Lauf der Sonne über den Himmel ist so regelmäßig, dass er – mit Sonnenuhren – benutzt wird, um die Zeit zu messen. Allerdings kann man bei genauer Beobachtung bemerken, dass sich der Sonnenlauf von Woche zu Woche, ja sogar von Tag zu Tag ändert und dass auch gut aufgestellte Sonnenuhren meistens nicht genau gehen (s. Abb. 1).

Der Sonnenlauf lässt sich z. B. mit einem Schattenstab sehr genau verfolgen: Aus der Spur, die die Schattenspitze im Laufe eines Sonnentages auf dem Boden zieht, lässt sich auf die Bahn der Sonne am Himmel zurückschließen. Solche Untersuchungen sind faszinierend und lehrreich ([2]). Aber sie benötigen viel Zeit und Ausdauer. Deshalb wird in dieser Praktikumsaufgabe ein anderer Wege beschritten¹: Einem Kalender werden die Auf- und Untergangszeiten der Sonne entnommen, die in vielen Taschenkalendern für jede Kalenderwoche angegeben werden. Aus diesen Angaben lassen sich sehr viele Details des Sonnenlaufs über den Himmel bzw. des Umlaufs der Erde um die Sonne ableiten.

2 Etwas Theorie

Die Erde umläuft die Sonne einmal im Jahr auf einer leicht exzentrischen, fast kreisförmigen Bahn. Dabei bewegt sie sich etwas schneller, wenn sie der Sonne besonders nahe ist. Zusätzlich rotiert die Erde in etwa 23 Stunden und 56 Minuten einmal um eine Achse, die nicht senkrecht auf der Bahnebene steht, sondern mit der Normalen einen Winkel von 23.5° bildet (Abb. 2, links). Weil sich die Sonne von einem Tag auf den nächsten auf ihrer Bahn um die Sonne etwas weiter bewegt, muss sie sich von einem Mittag bis zum darauf folgenden um etwas mehr als 360° drehen – und dafür benötigt sie im Mittel genau 24 Stunden.

¹Die Idee zu dieser Aufgabe geht auf W. Schlosser [4] zurück.

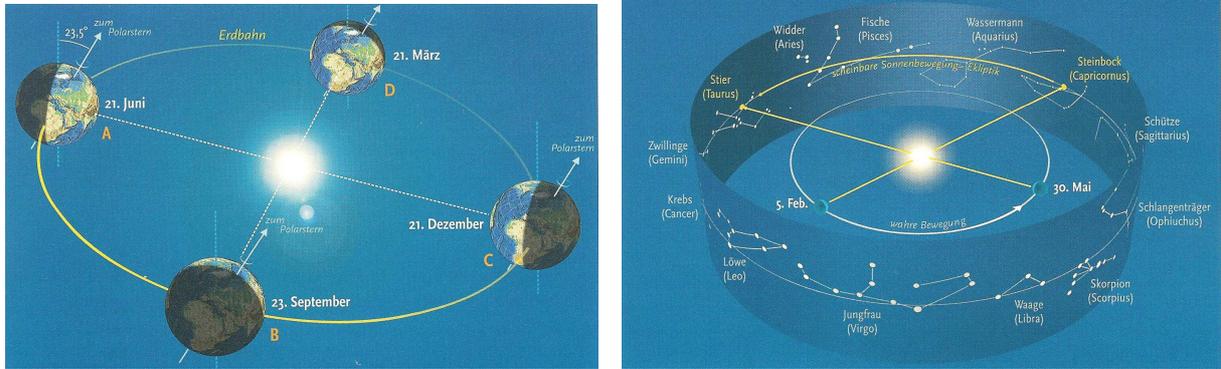


Abbildung 2: Der Umlauf der Erde um die Sonne (links) macht sich von der Erde aus durch die Bewegung der Sonne entlang der Ekliptik über den Sternenhimmel bemerkbar.

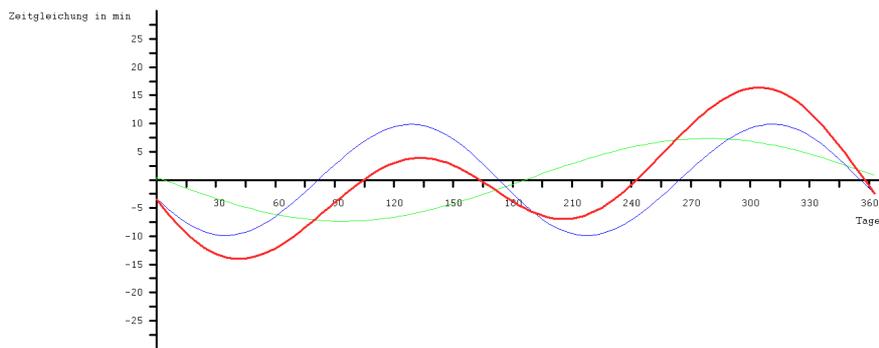


Abbildung 3: Die Zeitgleichung (rot) und die Beiträge des ungleichförmigen Umlaufs der Erde (grün) und der Achsneigung (blau)

Da die Menschen das System Erde-Sonne nicht von außen betrachten konnten, mussten sie diese Aussagen aus den Beobachtungen und Messungen erschließen, die sie von der Erde aus machen konnten. Dabei entsprechen der täglichen Rotation der Erde aus der „Innensicht“ der sich mit einer Periode von 23h56m drehende Sternenhimmel und die Wanderung der Sonne über den Tageshimmel von ihrem Aufgang am Osthimmel über ihren Höchststand im Süden bis zu ihrem Untergang am Westhimmel. Von Mittag zu Mittag benötigt sie dazu im Mittel 24 Stunden. Dem Umlauf der Erde um die Sonne entspricht die beobachtbare (bzw. indirekt erschließbare) jährliche Wanderung der Sonne über den Sternenhimmel *von West nach Ost* auf einer Bahn, die – und das entspricht der schief stehenden Rotationsachse der Erde! – mit dem Himmelsäquator einen Winkel von 23.5° bildet (Abb. 2 rechts).

Die Länge der Sonnentage variiert im Laufe eines Jahres um bis zu ± 30 Sekunden. Das führt zu Gangdifferenzen zwischen Sonnenuhren und unserer gleichmäßig laufenden Uhrzeit von bis zu 16 Minuten. Diese Unterschiede werden in Form der so genannten **Zeitgleichung** grafisch dargestellt (Abb. 3): Ist die Zeitgleichung positiv, gehen Sonnenuhren nach, sonst vor. Nur viermal im Jahr stimmen Sonnenzeit und mittlere Zeit überein.

Die Bewegung der Sonne über den Sternenhimmel verlängert den *Sonnentag* (von Mittag zu Mittag) gegenüber dem *Sternentag* (von einem Höchststand eines Sterns im Süden bis zum

nächsten) im Mittel um etwa vier Minuten. Diese Verlängerung ist nicht immer gleich groß: Die Sonnentage sind besonders lang, wenn sich die Sonne besonders schnell auf der Ekliptik bewegt, und umgekehrt (Abb. 3). Mit der ungleichförmigen Bewegung der Sonne lässt sich jedoch nicht erklären, warum Sonnenuhren *zweimal im Jahr* vor- und nachgehen (s. die grüne Kurve in Abbildung 3). Dafür ist der Winkel zwischen Himmelsäquator und Ekliptik verantwortlich (s. die blaue Kurve in Abbildung 3)².

3 Benötigte Hilfsmittel

Auf der letzten Seite finden Sie eine Tabelle. Sie enthält für jede Woche des Jahres die Angaben für die Sonnenauf- und -untergänge aus einem Taschenkalender³.

Zur Erleichterung der Bearbeitung finden Sie im Netz eine **Excel-Tabelle mit den Auf- und Untergangszeiten**. Die Tabelle mit den Lösungen finden Sie unter dem Namen `JahreslaufderSonnenL.xls`.

Die genannten Programme finden Sie im Netz unter <http://www.didaktik.physik.uni-due.de/~backhaus/AstroMaterialien>.

Ohne Computer und Tabellenkalkulationsprogramm werden eine Taschenrechner und für die Diagramme kariertes Papier benötigt.

Literatur

- [1] Backhaus, U.; Schlichting, H. J., *Astronomie mit einer Sonnenuhr*, Vorträge der DPG 1987 in Berlin, <http://www.didaktik.physik.uni-due.de/~backhaus/AstroMaterialien/Literatur/AstronomiemiteinerSonnenuhr.pdf>
- [2] Backhaus, U., Struzyna, S.: *Der Lauf der Sonne über den Himmel*, Grundschule Sachunterricht 51, 6 (2011), <http://www.didaktik.physik.uni-due.de/~backhaus/publicat/DerLaufderSonneueberdenHimmel.pdf>
- [3] Backhaus, U.: *Das Sonnenanalemma als Schulprojekt*, *Astronomie und Raumfahrt* 52/2, (2015), <http://www.didaktik.physik.uni-due.de/~backhaus/publicat/SonnenanalemmaalsSchulprojekt.pdf>, dort weitere Literatur
- [4] Schlosser, W.: *Astronomische Musterversuche für die Sekundarstufe I*, vorläufige Version, in den 1980er Jahren als Fotokopie vervielfältigt

²Mit dem Programm „ZeitgleichungundAnalemma“ können Sie sich die Zusammenhänge zwischen der Bewegung der Sonne auf der Ekliptik, der Länge der Sonnentage und dem Gang von Sonnenuhren (Zeitgleichung) visualisieren lassen.

³Die Daten entstammen einem Kalender für das Jahr 1996. Bis auf sehr kleine Abweichungen, die dadurch entstehen, dass das Jahr nicht 365 Tage sondern 365.25 Tage hat (Schaltjahr!), sind sie aber für jedes Jahr gleich.

4 Aufgaben (mit Lösungen)

Lösungen für die Aufgaben werden hier kursiv abgedruckt. Ein Aufgabenblatt ohne Lösungen kann aus dem Internet heruntergeladen werden.

1. Werten Sie die Angaben über die Auf- und Untergangszeiten der Sonne aus!

- (a) Stellen Sie die Veränderungen der Auf- und Untergangszeiten der Sonne im Verlauf des Jahres grafisch dar.

Lösung

Dazu müssen zunächst die Datumsangaben in Ordnungszahlen umgewandelt werden. Das ist per Hand etwas mühselig. Da aber in der Excel-Tabelle die Zellen mit den entsprechenden Angaben (Spalte B in „Sonne 96“) als „Datum“ formatiert sind, stellen Sie Excel-intern ohnehin ganze Zahlen dar⁴, sodass die Umrechnung einfach ist (Spalte A in „Lösungen“).

Um mit den angegebenen Uhrzeiten rechnen zu können, müssen sie aus dem Format „hh.mm“ in Stunden mit Dezimalen umgerechnet werden. Dazu müssen die Nachkommastellen durch 0.6 geteilt werden.

In der Excel-Tabelle ist das nicht erforderlich, weil die Zellen mit den Uhrzeiten das benutzerdefinierte Format „hh:mm“ haben. Excel-intern ist der Inhalt solcher Zellen als Bruchteil von 24 Stunden gespeichert. Die entsprechenden Zellen müssen also nur mit 24 multipliziert und als Fließkommazahlen formatiert werden (Spalten B und C auf dem Tabellenblatt „Lösungen“).

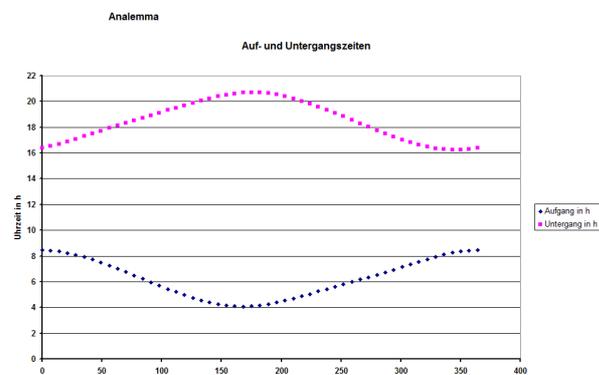


Abbildung 4: Die Auf- und Untergangszeiten der Sonne

- (b) Berechnen Sie aus den Auf- und Untergangszeiten die Zeit, die sich die Sonne über dem Horizont befindet („Sonnenscheindauer“), und stellen Sie sie grafisch dar.

Lösung

Da Sie die Uhrzeiten im Rahmen der vorangehenden Aufgabe bereits in Stunden mit Dezimalen umgerechnet haben, ist hier nur die Bildung einer Differenz erforderlich (Spalte D in „Lösung“)

⁴Tage, die seit dem 31. Dezember 1899 vergangen sind

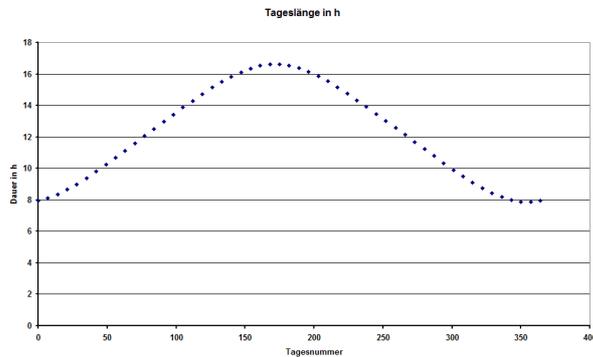


Abbildung 5: Die Tageslängen („Sonnenscheindauern“)

- (c) Berechnen Sie aus den Auf- und Untergangszeiten die Mittagszeitpunkte und stellen Sie ihre Veränderung im Laufe des Jahres grafisch dar. Vergleichen Sie die entstandene Kurve mit der Zeitgleichung in Abbildung 3.

Lösung

Da der Sonnenlauf über den Himmel völlig gleichförmig ist, dauert der „Aufstieg“ der Sonne genau so lange wie ihr „Abstieg“. Der Mittagszeitpunkt, der Zeitpunkt der größten Höhe der Sonne oder Kulminationszeitpunkt, ist deshalb das arithmetische Mittel aus Auf- und Untergangszeit (Spalte E in „Lösung“).

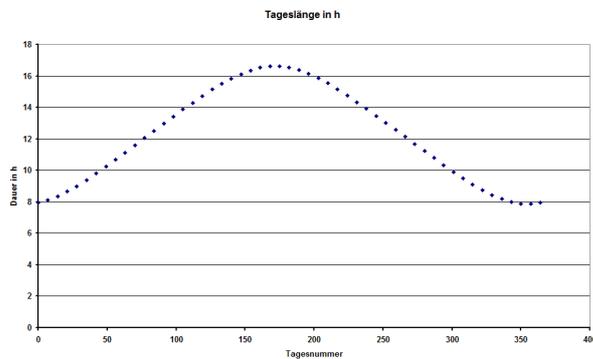


Abbildung 6: Uhrzeit des lokalen Mittags

Die Mittagszeitpunkte schwanken um bis zu ± 16 Minuten, und nicht einmal ihr Mittelwert ist 12 Uhr, sondern deutlich später.

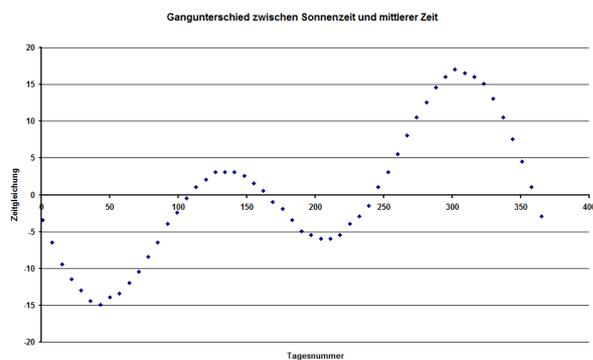


Abbildung 7: Die Zeitgleichung

Um aus den Messwerten die Zeitgleichung zu gewinnen, muss man ihre negative Abweichung vom Mittelwert berechnen (Spalte I in „Lösungen“) und darstellen (Tabellenblatt „Zeitgleichung“).

- (d) Berechnen Sie aus den Mittagszeitpunkten die jeweils über 7 Tage gemittelten Längen der Sonnentage (Zeit, die zwischen zwei aufeinander folgenden Kulminationszeitpunkten vergeht). Stellen Sie ihre Abweichung von 24 Stunden grafisch dar.

Lösung

Die gemittelte Länge l des Sonnentages zwischen den beiden Mittagszeitpunkten t_1 und t_2 ergibt sich aus

$$l = \frac{t_2 - t_1}{7}$$

(Spalte F in „Lösungen“)

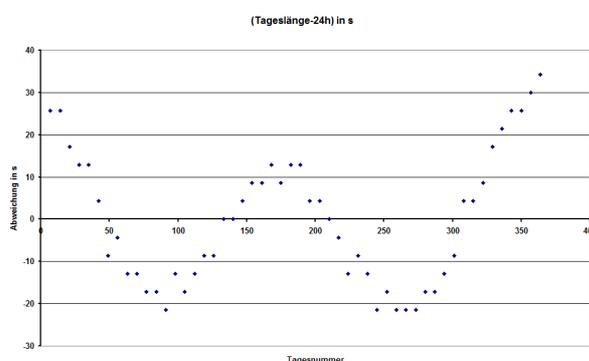


Abbildung 8: Abweichung der Tageslänge von 24 Stunden

Die Länge des Sonnentages weicht um bis zu 35 Sekunden von 24 Stunden ab. Besonders lang sind die Tage um den Jahreswechsel. Ein zweites, längst nicht so hohes Maximum tritt um die Jahresmitte auf.

2. Versuchen Sie, Ihre Ergebnisse zu interpretieren!

- (a) Woran liegt es, dass sich die Sonnenscheindauer im Laufe eines Jahres so stark ändert?

Lösung

Der Abstand der Sonnenposition vom Himmelsäquator (die **Deklination** δ_S der Sonne) ändert sich im Laufe des Jahres. Wenn die Deklination groß ist (im Sommer), sind die Tage lang, wie sie klein ist (im Winter), kurz.

Die Änderung der Deklination der Sonne ist Folge der Neigung der Erdachse gegen die Ebene ihrer Bahn um die Sonne.

- (b) Versuchen Sie eine Begründung für die ungleichmäßig sich ändernde Länge des Sonnentages zu geben. Berücksichtigen Sie dabei

- i. die Neigung der Erdachse gegen die Bahnebene der Erde (bzw. den Winkel zwischen der jährlichen Sonnenbahn über den Sternenhimmel (der Ekliptik) und dem Himmelsäquator und
- ii. den ungleichförmigen Umlauf der Erde um die Sonne (bzw. die unterschiedlichen (Winkel-) Geschwindigkeiten der Sonne auf ihrer Bahn über den Sternenhimmel.

Tipp: Simulieren Sie auf dem Computer die Entstehung der so genannten **Zeitgleichung** mit dem Programm „ZeitgleichungundAnalemma“, das Sie im Netz finden.

Lösung

Die Sonne bewegt sich (wegen des Umlaufs der Erde um die Sonne) von Westen nach Osten über den Sternenhimmel. Dadurch ist der Sonnentag länger als der Sternentag – im Mittel um vier Minuten. Bewegt sich die Sonne überdurchschnittlich schnell, ist der Sonnentag überdurchschnittlich lang: Je schneller sich die Sonne auf der Ekliptik bewegt, desto länger ist der Sonnentag.

Genauer genommen, kommt es nicht (nur) auf die Schnelligkeit der Sonnenbewegung an, sondern darauf, wie schnell sie die Stundenlinien am Sternenhimmel⁵ überquert – und das ändert sich allein dadurch, dass die Ekliptik und der Himmelsäquator einen Winkel miteinander bilden:

- Ist die Sonne besonders weit vom Äquator entfernt (gegen Sommer- und Winteranfang), d. h. der Betrag ihrer Deklination besonders groß, überquert sie die Stundenlinien, die dort enger liegen, besonders schnell.
- Ist die Sonne nahe dem Himmelsäquator (gegen Frühlings- und Herbstanfang), schneidet sie die Stundenlinien besonders langsam, weil ihre Bahn einen besonders großen Winkel mit dem Äquator bildet.

Außerdem bewegt sich die Sonne besonders schnell am Himmel, wenn die Erde der Sonne besonders nahe ist (Anfang Januar), und besonders langsam, wenn sie besonders weit von ihr entfernt ist (Anfang Juli).

Anfang des Jahres überlagern sich die beiden Effekte konstruktiv, Mitte des Jahres destruktiv. Deshalb ist das Maximum der Tageslänge Anfang des Jahres viel höher als das Mitte des Jahres⁶.

3. Werten Sie die Daten *quantitativ* aus.

- (a) Auf welcher geografischen Länge liegt der Ort, für den die Kalenderangaben berechnet wurden?

Lösung

Die Mitteleuropäische Zeit MEZ ist eine Zonenzeit. Sie ist für alle Orte in der entsprechenden Zeitzone – fast ganz Europa – gleich. Der Zeitpunkt der Sonnenkulmination ist dagegen eine **lokale Zeit** („lokaler Mittag“): Je weiter im Westen sich ein Ort befindet, desto später kulminiert dort die Sonne – und zwar pro Längengrad um vier Minuten später. Die Mitteleuropäische Zeit ist (im Mittel) richtig für Orte auf dem 15. Längengrad östlich von Greenwich ($\lambda_B = 15^\circ$), z. B. in **Görlitz**.

Die mittlere Mittagszeit ergibt sich zu $t_M = 12:22:03$ Uhr MEZ (Zelle E 57 in „Lösung“). Daraus folgt für die geografische Länge λ des Bezugsortes:

$$\lambda = \lambda_B - \frac{1^\circ}{4\text{min}}(t_M - 12.00) = 9.5^\circ$$

(Zelle E 58).

- (b) Wie groß ist die geografische Breite dieses Ortes. Für die Beantwortung dieser Frage benötigen Sie die maximale Deklination der Sonne: $\delta_{max} = 23.5^\circ$ ⁷.

⁵die Linien konstanter Rektaszension

⁶Aus dem Unterschied lässt sich ein recht guter Wert für die Exzentrizität der Erdbahn ableiten (s. [1]).

⁷Weil beide Effekte nahezu in Phase sind (s. Abb. 3), lässt sich δ_{max} gut aus der mittleren Höhe der Tageslängnextrema (s. [1]) abschätzen.

Tipp: Der Zusammenhang zwischen der „Sonnenscheindauer“ (der Länge τ des Tagbogens der Sonne), der Deklination δ_S der Sonne und der geografischen Breite φ lautet:

$$\cos \frac{\tau}{2} = -\tan \varphi \tan \delta_S \quad (1)$$

Daraus ergibt sich τ zunächst als Winkel, der noch in Stunden umgerechnet werden muss.

Lösung

Die Sonnenscheindauer ist am größten, wenn die Deklination der Sonne maximal ist:

$$\varphi = -\arctan \left(\frac{\cos \frac{\tau_{max}}{2}}{\tan \delta_{max}} \right) = 52.5^\circ.$$

Damit haben sich fast genau die geografischen Koordinaten der Stadt Kassel ($(\varphi, \lambda) = (51.3^\circ, 9.5^\circ)$ nach Wikipedia) ergeben, die im Zentrum Deutschlands liegt.

- (c) Nachdem Sie die geografische Breite des Ortes bestimmt haben, können Sie die Deklination der Sonne mithilfe derselben Beziehung für jede Woche des Jahres berechnen.

Lösung

$$\delta_S = -\arctan \left(\frac{\cos \frac{\tau}{2}}{\tan \varphi} \right)$$

(Spalte G in „Lösungen“)

- (d) Das Azimut A der Untergangspunkte der Sonne, d. i. der von Süden aus gemessene Winkel zum Untergangspunkt, hängt in der folgenden Weise von der Deklination der Sonne und der geografischen Breite des Beobachtungsortes ab⁸:

$$\cos A = -\frac{\sin \delta_S}{\cos \varphi}$$

Berechnen Sie mit Hilfe dieser Gleichung, wie stark sich am Ort, für den die Kalenderdaten berechnet worden sind, die Auf- und Untergangspunkte der Sonne zwischen Winteranfang und Sommeranfang verändern.

Lösung

Setzt man für die Deklination der Sonne $\delta_S = \pm 23.5^\circ$ ein, ergibt sich

$$49.1^\circ \leq A \leq 130.9^\circ$$

(Zellen D60/61 in „Lösungen“) Die Auf- und Untergangspunkte wandern also (in Kassel) um mehr als 80° !

- (e) Konstruieren nun Sie nun zum krönenden Abschluss aus den Daten ein so genanntes **Analemma**, indem Sie die Deklination der Sonne (oder ihre Mittagshöhe) als Funktion der Mittagsuhrzeit (oder ihrer Abweichung vom Mittelwert) grafisch darstellen.

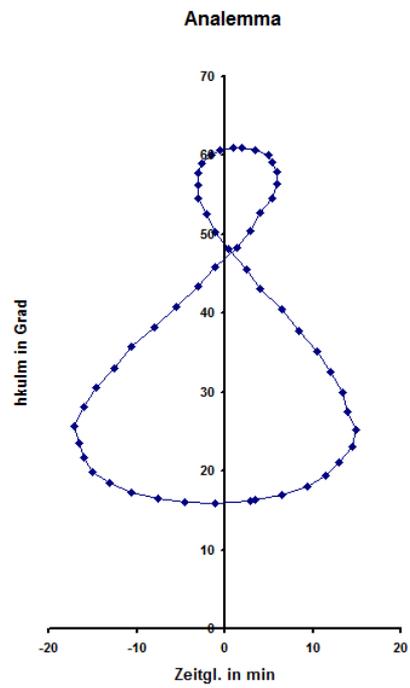
Lösung

Die Mittagshöhe der Sonne beträgt

$$h_{Kulm} = 90^\circ - \varphi + \delta_S$$

(Spalte H in „Lösungen“).

⁸Die Beziehung ist nicht schwer herzuleiten. Solche Ableitungen sind jedoch nicht Gegenstand dieser Praktikumsaufgabe.



Wollte man das Analemma in dieser Weise messen, könnte man den Zeitpunkt des lokalen Mittags und die zugehörige Höhe der Sonne über dem Horizont registrieren. Dafür braucht man lediglich einen Schattenstab (Gnomon) und eine genau gehende Uhr.

lfNr	Datum	SA (MEZ)	SU (MEZ)	Tageslänge in h.min	Mittagszeit (MEZ)
1	1. 1.1996	8.27	16.24	7.57	12.26
2	8. 1.1996	8.25	16.32	8.07	12.29
3	15. 1.1996	8.21	16.42	8.21	12.32
4	22. 1.1996	8.14	16.53	8.39	12.34
5	29. 1.1996	8.05	17.05	8.60	12.35
6	5. 2.1996	7.55	17.18	9.23	12.37
7	12. 2.1996	7.43	17.31	9.48	12.37
8	19. 2.1996	7.29	17.43	10.14	12.36
9	26. 2.1996	7.15	17.56	10.41	12.36
10	4. 3.1996	7.00	18.08	11.08	12.34
11	11. 3.1996	6.45	18.20	11.35	12.33
12	18. 3.1996	6.29	18.32	12.03	12.31
13	25. 3.1996	6.13	18.44	12.31	12.29
14	1. 4.1996	5.57	18.55	12.58	12.26
15	8. 4.1996	5.42	19.07	13.25	12.25
16	15. 4.1996	5.26	19.19	13.53	12.23
17	22. 4.1996	5.12	19.30	14.18	12.21
18	29. 4.1996	4.58	19.42	14.44	12.20
19	6. 5.1996	4.45	19.53	15.08	12.19
20	13. 5.1996	4.34	20.04	15.30	12.19
21	20. 5.1996	4.24	20.14	15.50	12.19
22	27. 5.1996	4.16	20.23	16.07	12.20
23	3. 6.1996	4.10	20.31	16.21	12.21
24	10. 6.1996	4.06	20.37	16.31	12.22
25	17. 6.1996	4.05	20.41	16.36	12.23
26	24. 6.1996	4.06	20.42	16.36	12.24
27	1. 7.1996	4.10	20.41	16.31	12.26
28	8. 7.1996	4.16	20.38	16.22	12.27
29	15. 7.1996	4.23	20.32	16.09	12.28
30	22. 7.1996	4.32	20.24	15.52	12.28
31	29. 7.1996	4.42	20.14	15.32	12.28
32	5. 8.1996	4.53	20.02	15.09	12.28
33	12. 8.1996	5.03	19.49	14.46	12.26
34	19. 8.1996	5.15	19.35	14.20	12.25
35	26. 8.1996	5.26	19.21	13.55	12.24
36	2. 9.1996	5.37	19.05	13.28	12.21
37	9. 9.1996	5.48	18.50	13.02	12.19
38	16. 9.1996	5.59	18.34	12.35	12.17
39	23. 9.1996	6.10	18.18	12.08	12.14
40	30. 9.1996	6.21	18.02	11.41	12.12
41	7.10.1996	6.33	17.46	11.13	12.10
42	14.10.1996	6.44	17.31	10.47	12.08
43	21.10.1996	6.56	17.16	10.20	12.06
44	28.10.1996	7.08	17.02	9.54	12.05
45	4.11.1996	7.21	16.50	9.29	12.06
46	11.11.1996	7.33	16.39	9.06	12.06
47	18.11.1996	7.45	16.29	8.44	12.07
48	25.11.1996	7.56	16.22	8.26	12.09
49	2.12.1996	8.06	16.17	8.11	12.12
50	9.12.1996	8.15	16.14	7.59	12.15
51	16.12.1996	8.21	16.14	7.53	12.18
52	23.12.1996	8.25	16.17	7.52	12.21
53	30.12.1996	8.27	16.23	7.56	12.25