

# Die Parallaxe des Mondes (Moonproject 2000) (mit Lösungen)



Abbildung 1: Der Mond am 9. Dezember 2000 um 21:00 UT zwischen Jupiter und Saturn, fotografiert von Koblenz (links) und von der Hakos-Farm in Namibia aus (rechts)

## 1 Einleitung

Im November 2000 verabredeten sich mehrere Gruppen von Schülern, Physiklehrern und Studenten aus Europa (Portugal, Teneriffa, Bulgarien, Schweden, Finnland und Deutschland) und Afrika (Namibia), den Mond gleichzeitig zu fotografieren. Die Idee zu diesem Projekt<sup>1</sup> entstand auf dem europäischen Physikfestival „Physics On Stage“ in Genf, an dem einige der Teilnehmer als Delegierte verschiedener Länder teilnahmen.

Neben der Bildung und Pflege internationaler Kontakte und dem Einüben weltweiter Kooperation via Internet hatten sich die Projektpartner u. a. folgende Ziele gesetzt:

1. Gleichzeitig aufgenommene Fotos des Mondes in der Nähe heller Planeten oder Sterne sollen die parallaktische Verschiebung des Mondes sichtbar machen und auf diese Weise einen visuellen Nachweis dafür liefern, dass der Mond, der „viel weiter als alles Irdische“ entfernt ist (Wagenschein), doch eine endliche Entfernung hat.

---

<sup>1</sup><http://www.didaktik.physik.uni-due.de/~backhaus/moonproject.htm>

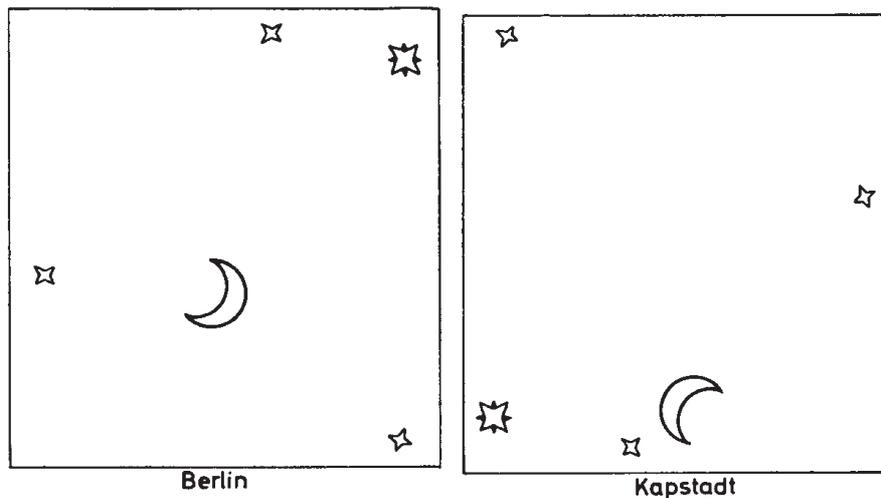


Abbildung 2: Der Mond, gleichzeitig gesehen von Beobachtern in Berlin und Kapstadt (aus [4])

2. Die Fotos sollen mit dem Ziel, die Entfernung des Mondes zu bestimmen, ausgehend von einfachen, auch Schülern der Sekundarstufe I zugänglichen, Verfahren mit zunehmend exakten Methoden quantitativ ausgewertet werden.
3. Die entstandenen Materialien sollen allen Teilnehmern an dem Projekt und der Öffentlichkeit als Material für eigene Auswertungsversuche zugänglich gemacht werden.

Die vorliegende Praktikumsaufgabe ist Teil der Realisierung dieser Ziele. Eine weitere Aufgabe ([3]) wird sich anhand neuerer Digitalfotos auf die exakteren Auswertungsmethoden konzentrieren.

## 2 Das Messprinzip

Nach Wagenschein ([4]) kann man das Prinzip der Mondparallaxe mit zwei Beobachtern erläutern, die in Berlin und Kapstadt zur selben Zeit den Mond am Sternenhimmel beobachten (s. Abb. 2): Für den Beobachter in Kapstadt steht nicht nur der ganze Himmel auf dem Kopf (weil er selbst „auf dem Kopf steht“), sondern der Mond steht für ihn näher bei den nördlichen Nachbarsternen als für den Beobachter in Berlin: Der Mond ist bei der fiktiven Reise nach Süden *nach Norden zurückgeblieben*.

Zur Zeit des Treffens im Jahr 2000 gab es entsprechende Fotos noch nicht. Deshalb verabredeten wir das folgende Vorgehen: Der Mond wird, an einem Tag, an dem er in der Nähe heller Bezugsobjekte steht<sup>2</sup>, *gleichzeitig* von unseren weit voneinander entfernten Wohnorten aus fotografiert. Beim Vergleich der Fotos offenbarten sich unterschiedliche

<sup>2</sup>Es ist schwierig die Fotos so zu belichten, dass der Mond nicht zu stark überbelichtet ist, damit seine Position auf dem Bild gut zu messen ist, dass aber trotzdem noch Bezugsobjekte des Sternenhimmels erkennbar sind.

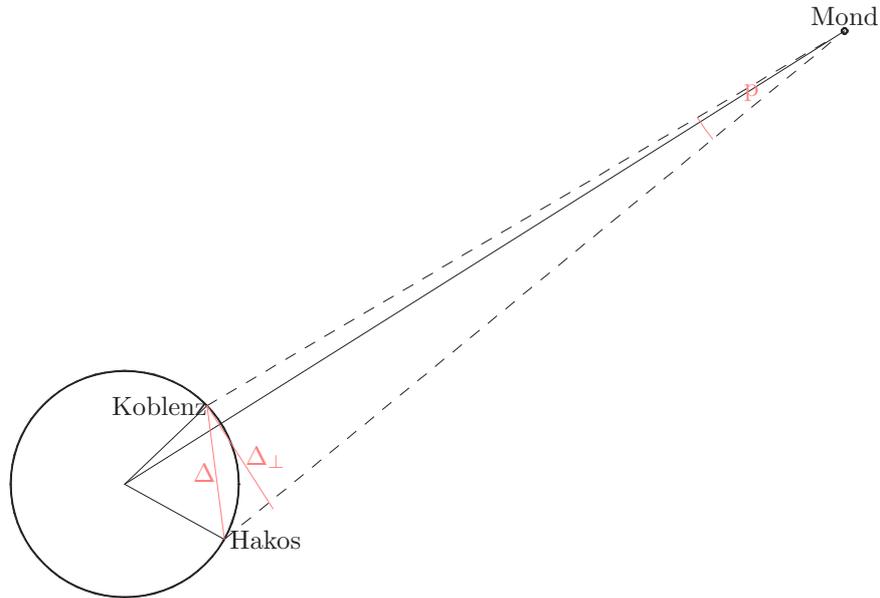


Abbildung 3: Parallaxenmessung durch gleichzeitiges Anpeilen des Mondes von Deutschland und Namibia aus

„Blickrichtungen“ zum Mond – erkennbar an verschiedenen Positionen relativ zum Hintergrund zweier viel weiter entfernter Planeten. Vermessung seiner (Winkel-) Abstände zu den Planeten in den Fotos und Konstruktion der Mondpositionen auf einer gemeinsamen Grafik macht die parallaktische Verschiebung des Mondes sichtbar. Der Winkelabstand zwischen den Mondpositionen ist der von dem (linearen!) Abstand  $\Delta$  zwischen den beiden Beobachtungsorten hervorgerufene *Parallaxenwinkel*  $p$  des Mondes (s. Abb. 3).

Der Abstand  $d_M$  des Mondes ergibt sich dann gemäß

$$d_M = \frac{\Delta}{\tan p} \quad (1)$$

Dabei ist zunächst vernachlässigt worden, dass die Verbindungslinie zwischen den Beobachtungsorten nicht senkrecht auf der Richtung zum Mond steht.

Für die Entfernung kommt es aber auf den *projizierten Abstand*  $\Delta_\perp$  zwischen den beiden Beobachtungsorten an, der um den Sinus des Projektionswinkels  $w$  kleiner ist. Aus (1) wird deshalb

$$d_M = \frac{\Delta_\perp}{\tan p} = \frac{\Delta \sin w}{\tan p} \quad (2)$$

### 3 Etwas mehr Theorie

Um den linearen Abstand  $\Delta$  zwischen den Beobachtungsorten berechnen zu können, braucht man ihre geografischen Koordinaten (Breite,Länge)=  $(\varphi, \lambda)$ . Aus ihnen lässt sich der zwischen den Orten aufgespannte Zentralwinkel  $\eta$  mit Hilfe des Seitenkosinussatzes der sphärischen Geometrie berechnen:

$$\cos \eta = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos(\lambda_1 - \lambda_2) \quad (3)$$

Aus dem Zentralwinkel  $\eta$  ergibt sich der gesuchte Abstand  $\Delta$  wie folgt:

$$\Delta = 2R_E \sin \frac{\eta}{2} \quad (R_E = \text{Erdradius}) \quad (4)$$

(Machen Sie sich das anhand einer Zeichnung klar!)

Etwas schwieriger ist die Berechnung des Projektionswinkel  $w$ . Dazu ist ein wenig Vektorrechnung erforderlich. Außerdem müssen die Sternzeiten an den Beobachtungsorten zum Zeitpunkt der Aufnahmen bekannt sein. Da sich  $w$  bei den hier beschriebenen Messungen nur wenig von  $90^\circ$  unterscheidet, wird auf seine Berücksichtigung verzichtet.

## 4 benötigte Hilfsmittel

- Zirkel und Lineal mit Maßstab
- Für eine eventuelle Auswertung der digitalen Bilder am Computer:
  - Bildbearbeitungsprogramm, z. B. ImageJ
  - Die Originalbilder aus Koblenz (Fotos/Koblenz2100.jpg), Namibia (Fotos/Namibia2100.jpg), Bulgarien (Fotos/Smolyan2100.jpg) und von Teneriffa (Fotos/Tenerife2100.jpg)
- vorbereitete Excel-Tabelle MondparallaxeMoonproject.xls (bzw. MondparallaxeMoonprojectmL.xls) mit den Aufnahmedaten aller Bilder

Die Fotos waren im Original analog und wurden nachträglich digitalisiert.

## Literatur

- [1] U. Backhaus, *Simultaneously Observing and Photographing the Moon*, Vorträge der DPG 2001 in Bremen  
(<http://www.didaktik.physik.uni-due.de/~backhaus/AstroMaterialien/Literatur/moonproject.pdf>)
- [2] U. Backhaus, *Die Entfernung des Mondes und die Größe der Erde. Ergebnisse zweier internationaler Beobachtungsprojekte*, Vorträge der DPG 2010 in Hannover  
(<http://www.phydid.de/index.php/phydid-b/article/view/219/278>)
- [3] U. Backhaus, A. Knülle-Wenzel, *Die Mondparallaxe Bochum - Namibia*, Aufgabe des Astronomischen Schlechtwetterpraktikums  
<http://www.didaktik.physik.uni-due.de/~backhaus/AstroPraktikum/>
- [4] M. Wagenschein, *Wie weit ist der Mond von uns entfernt*, in: Naturphänomene sehen und verstehen, Klett: Stuttgart 1988  
(<http://www.didaktik.physik.uni-due.de/~backhaus/Astromaterialien/Literatur/WagenscheinWieweitistderMondvonunsentfernt.pdf>)

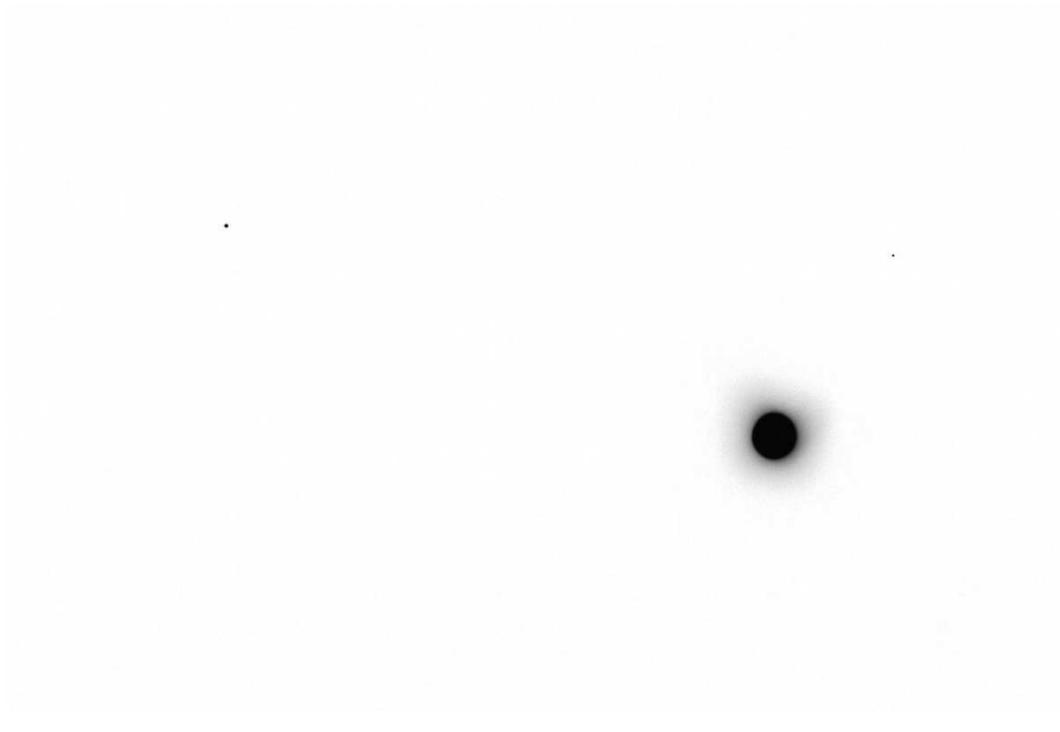


Abbildung 4: Der Mond, zwischen Jupiter (links) und Saturn (rechts) von Koblenz aus fotografiert (U. Backhaus)

## 5 Aufgaben (mit Lösungen)

In dieser Praktikumsaufgabe werden Amateurfotos des Mondes vom 9. Dezember 2000 um 21:00 UT (Abbildungen 4 - 9<sup>3</sup>) ausgewertet. Dieser Tag war von den Teilnehmern gewählt worden, weil der Mond zwischen den hellen Planeten Jupiter und Saturn stand, die als („unendlich ferne“) helle Bezugsobjekte dienen konnten.

Die Mondparallaxe soll sichtbar gemacht und gemessen werden, indem die Positionen des Mondes relativ zu den Planeten in ein einziges Bild eingezeichnet werden.

**Aufgabe 1** Messen Sie die Winkelabstände des Mondes von Jupiter und Saturn auf den Fotos aus Koblenz (Abb. 4) und Namibia (Abb. 5).

**Der Winkelabstand der beiden Planeten betrug zur Zeit der Aufnahmen  $d_{JS} = 8.785^\circ$ .**

- Messen Sie zunächst die Abstände in Millimetern (bzw. an den digitalisierten Fotos in Pixeln).
- Bestimmen Sie anhand des Abstandes zwischen Jupiter und Saturn die Maßstäbe der Bilder. Mit diesen können Sie dann die Abstände des Mondes von den Planeten in Grad ausrechnen.

---

<sup>3</sup>Die ursprünglich analogen Aufnahmen wurden nachträglich digitalisiert. Um Druckwertschwärze zu sparen, werden sie hier invertiert dargestellt.

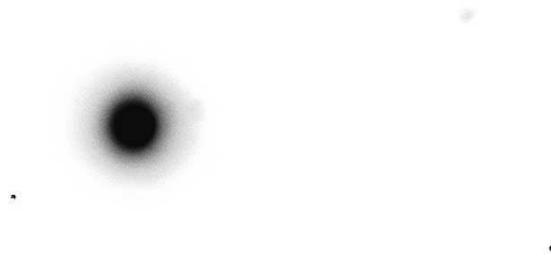


Abbildung 5: Der Mond, zwischen Jupiter (rechts!) und Saturn (links) von Namibia aus fotografiert (E. v. Grumbkow)

	$d_{JS}$	Maßstab	$d_{MJ}$		$d_{MS}$	
Koblenz	750.77Px	$\frac{85.46Px}{1^\circ}$	661.3Px	7.74°	243.5Px	2.85°
Hakos-Farm			491.8Px	7.10°	156.1Px	2.25°

**Aufgabe 2** Übertragen Sie die für die Hakos-Farm gemessenen Abstände des Mondes in die vergrößerte Darstellung des Fotos aus Koblenz (Abb. 6). Bestimmen Sie dazu zunächst den Maßstab dieser Abbildung, und rechnen Sie dann die von Namibia aus gemessenen Winkelabstände des Mondes von Jupiter und Saturn hoch. Konstruieren Sie dann mit einem Zirkel die entsprechende Mondposition in Abbildung 6.

Messen Sie in der Abbildung den Winkelabstand der beiden Mondpositionen. Das ist der zu den beiden Beobachtungsorten gehörende Parallaxenwinkel  $p$ .

**Lösung:** (siehe Abbildung 7, die mit Excel erstellt wurde)

Es ergibt sich:

$$p = 1.18^\circ$$

**Aufgabe 3** Berechnen Sie mit den Gleichungen (3) und (4) den linearen Abstand  $\Delta$  der beiden Beobachtungsorte aus ihren geografischen Koordinaten. Leiten Sie schließlich mit Gleichung (1) die Entfernung des Mondes als Vielfaches des Erdradius  $R_E =$

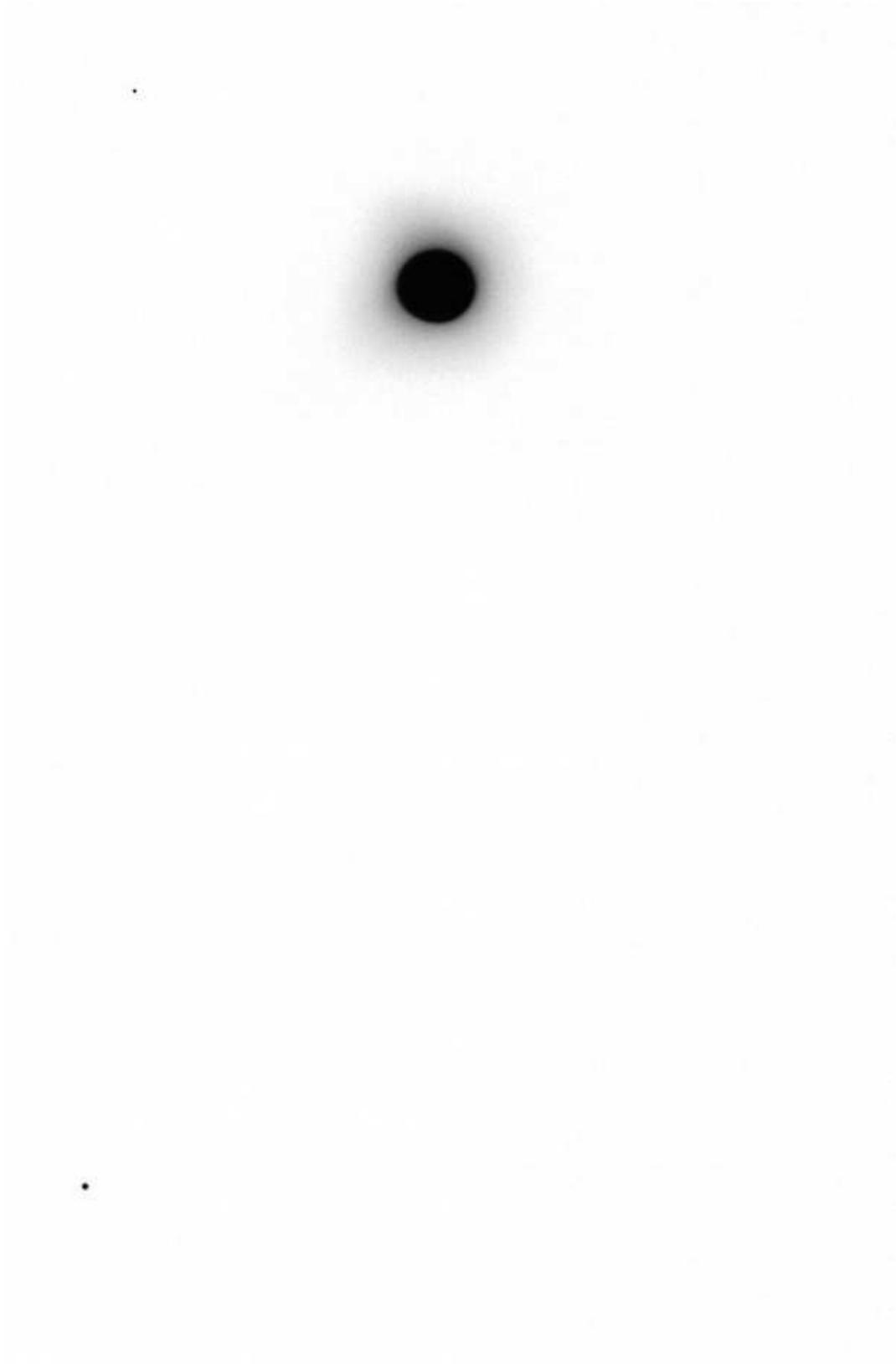


Abbildung 6: Zur Konstruktion der anderen Mondpositionen

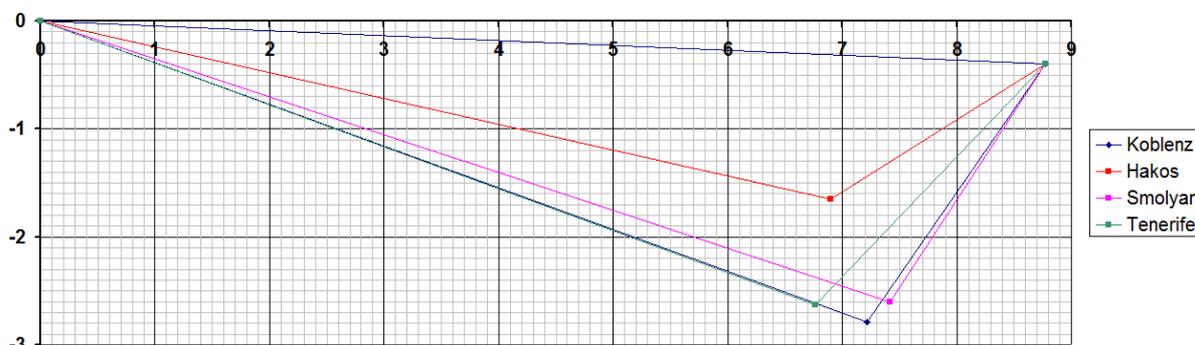


Abbildung 7: Konstruktion der relativen Lagen der Mondabbildungen

**6378km** und in Kilometern ab, und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem „wahren“ Wert ( $57.74R_E$ ), den man z. B. mit Planetariumsprogrammen finden kann.

geogr. Koordinaten		
	geogr. Breite $\varphi$	geogr. Länge $\lambda$
Koblenz	$50.18^\circ$	$7.53^\circ$
Hakos-Farm	$-22.48^\circ$	$14.95^\circ$
Smolyan	$41.53^\circ$	$24.75^\circ$
Teneriffa	$28.48^\circ$	$-16.32^\circ$

**Lösung:**

$$\eta = 73^\circ \implies \Delta = 1.19R_E$$

Damit ergibt sich schließlich

$$d_M = \frac{\Delta}{\tan p} = 57.7R_E = 368000km$$

Das ist – GLÜCK GEHABT! – nur um 0.1% kleiner als der richtige Wert.

#### Aufgabe 4 (Zusatzaufgabe)

Führen Sie alle Auswertungsschritte auch für die Bilder aus Smolyan (Bulgarien) und Teneriffa (Spanien) durch, bis Sie in Abbildung 6 vier Mondpositionen markiert haben, an denen Sie die parallaktische Bewegung des Mondes zunächst *qualitativ* beschreiben können: Wenn man von Osten nach Westen reist, rückt der Mond ... usw.

Messen Sie dann die Parallaxenwinkel  $p$  aus, berechnen Sie die zugehörigen Basislängen  $\Delta$  und leiten Sie aus jedem Beobachtungspaar die Mondentfernung her. Können Sie sich die unterschiedliche Qualität der Ergebnisse erklären?

**Lösung:**

<i>Ort 1</i>	<i>Ort 2</i>	$p$	$\eta$	$\Delta$	$d_M$
<i>Koblenz</i>	<i>Hakos</i>	1.18°	73°	1.19 $R_E$	57.7 $R_E$
	<i>Smolyan</i>	0.27°	15°	0.26 $R_E$	53.8 $R_E$
	<i>Teneriffa</i>	0.48°	28°	0.49 $R_E$	58.4 $R_E$
<i>Hakos</i>	<i>Smolyan</i>	1.09°	65°	1.07 $R_E$	56.1 $R_E$
	<i>Teneriffa</i>	0.99°	59°	0.99 $R_E$	57.3 $R_E$
<i>Smolyan</i>	<i>Teneriffa</i>	0.66°	36°	0.61 $R_E$	53.4 $R_E$

### Aufgabe 5 (zusätzliche Bildbearbeitung)

Versuchen Sie, durch Überlagerung der vier Einzelbilder mit Hilfe der beiden Planeten ein Gesamtbild zu erzeugen, das die „vier Monde“ von Koblenz, der Hakos-Farm, Smolyan und Teneriffa darstellt. Dazu müssen Sie vor der Überlagerung die Bilder skalieren, drehen und verschieben:

- Messen Sie auf allen Bildern die (Pixel-) Positionen von Jupiter und Saturn.
- Berechnen Sie aus diesen Positionen die (Pixel-) Abstände zwischen den Planeten und den Positionswinkel von Saturn relativ zu Jupiter.
- Skalieren Sie drei der vier Bilder so, dass der Abstand der Planeten voneinander auf allen Bildern gleich groß ist.
- Drehen Sie drei der vier Bilder so, dass Saturn auf allen Bildern denselben Positionswinkel relativ zu Jupiter hat.
- Beschneiden Sie alle Bilder so, dass sie dieselbe Größe haben.
- Packen Sie die Bilder in einen Stack, und verschieben Sie sie so, dass Jupiter – und damit auch Saturn! – auf allen Bildern dieselbe Position hat.
- Nun endlich können Sie die Bilder miteinander kombinieren, z. B. indem Sie von allen die mittlere oder die größte Helligkeit berechnen.

**Lösung:** (siehe Abbildung 10, S. 11)

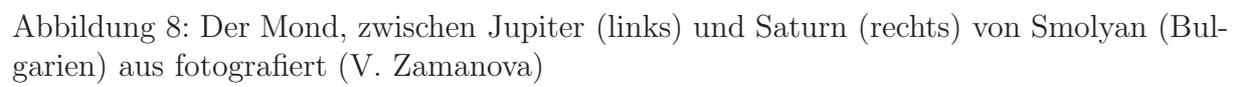
The image is extremely faint and blurry, showing a central bright spot (the Moon) and two other bright spots (Jupiter and Saturn) positioned horizontally on either side. The background is dark with some noise.

Abbildung 8: Der Mond, zwischen Jupiter (links) und Saturn (rechts) von Smolyan (Bulgarien) aus fotografiert (V. Zamanova)

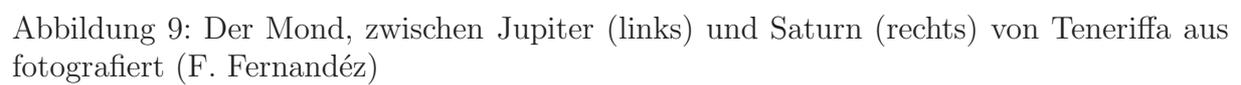
The image is extremely faint and blurry, showing a central bright spot (the Moon) and two other bright spots (Jupiter and Saturn) positioned horizontally on either side. The background is dark with some noise.

Abbildung 9: Der Mond, zwischen Jupiter (links) und Saturn (rechts) von Teneriffa aus fotografiert (F. Fernández)



Abbildung 10: Kombination der 21:00-UT-Fotos aus Koblenz, Namibia, Smolyan und Teneriffa. Welcher Mond gehört zu welchem Aufnahmeort?