

# **Der Energietransport durch elektrische Ströme und elektromagnetische Felder in verschiedenen Darstellungen<sup>1</sup>**

Ein Beispiel für das Zusammenspiel  
zwischen Erfahrung und Konvention bei der physikalischen  
Begriffsbildung

**Udo Backhaus**

Fachbereich Physik der Universität Osnabrück

<sup>1</sup>Dem Andenken an Prof. Dr. Klaus Schäfer gewidmet



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Vom Fließen physikalischer Größen</b>	<b>9</b>
2.1	Physikalische Flüsse bei statischen und stationären Vorgängen	9
2.2	Grundlagen . . . . .	10
2.2.1	Empirische Grundlagen . . . . .	10
2.2.2	Interpretationen . . . . .	10
2.2.3	Suggestionen . . . . .	12
2.3	Probleme . . . . .	13
2.3.1	Fachliche Probleme . . . . .	13
2.3.2	Didaktische Probleme . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Energie im elektromagnetischen Feld</b>	<b>17</b>
3.1	Vorbemerkungen . . . . .	17
3.2	Maxwell-Gleichungen und elektrodynamische Potentiale . . . .	18
3.3	Poyntingscher Satz . . . . .	19
3.4	Alternative Darstellungen . . . . .	21
3.4.1	Hines-Darstellung . . . . .	22
3.4.2	Lai-Darstellung . . . . .	23
3.4.3	Neue Darstellung . . . . .	24
3.5	Unentscheidbarkeit . . . . .	24
3.6	Gegenüberstellung der Bilder . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Gleichströme und quasistat. Ströme</b>	<b>33</b>
4.1	Poynting-Bild . . . . .	35
4.2	Lai-Bild . . . . .	35
4.3	Hines-Bild . . . . .	37
4.4	Neues Bild . . . . .	37
<b>5</b>	<b>Transformatoren</b>	<b>41</b>
5.1	Vorbemerkungen . . . . .	41

5.2	Zylindrischer Transformator . . . . .	42
5.2.1	Berechnung der elektrischen und magnetischen Felder .	42
5.2.2	Poynting-Bild . . . . .	44
5.2.3	Neues Bild . . . . .	46
5.3	Langgestreckter Transformator . . . . .	48
5.3.1	Poynting-Bild . . . . .	49
5.3.2	Hines-Bild . . . . .	50
<b>6</b>	<b>Zwei-Platten-Wellenleiter</b>	<b>53</b>
6.1	Berechnung der Felder und Potentiale . . . . .	53
6.2	Energieströmung in Lorentz-Eichung . . . . .	54
6.3	Andere Potentiale in Lorentz-Eichung . . . . .	56
6.4	Verallgemeinerungen . . . . .	57
6.4.1	Beliebiger Leitungsquerschnitt . . . . .	57
6.4.2	Ebene Wellen . . . . .	58
<b>7</b>	<b>Hertzscher Dipol</b>	<b>61</b>
7.1	Berechnung der Felder und Potentiale . . . . .	61
7.2	Details der Energieströmung . . . . .	63
7.3	Energieabstrahlung . . . . .	68
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung und Diskussion</b>	<b>71</b>
	<b>Literatur</b>	<b>77</b>
	<b>Danksagung</b>	<b>81</b>
	<b>Anhang: Formelsammlung</b>	<b>83</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Physik wird von Menschen für Menschen gemacht, um Vorgänge in unserer natürlichen und technischen Umwelt beschreiben, erklären, vorhersagen und beeinflussen zu können. Die Aussagen der Physik fassen vielfältige Erfahrungen zusammen und ordnen sie in ein umfassendes theoretisches System ein. Dabei gehen physikalische Aussagen immer auch über die unmittelbare Erfahrung hinaus. Deshalb greifen bei der Bildung physikalischer Begriffe empirische Erfahrungen und konventionelle Entscheidungen ineinander.

Die wissenschaftstheoretische Diskussion des Verhältnisses zwischen Phänomenen, physikalischen Begriffen und physikalischer Theorie hat die Entwicklung der neuzeitlichen Physik von ihrem Beginn an begleitet. Diese Diskussion soll hier nicht dargestellt werden. Stattdessen beschränke ich mich darauf, die dieser Arbeit zugrunde liegende Position, die sich eng an *Wagenschein* (siehe insbesondere [52]) und *Jung* [20] anlehnt, thesenartig zusammenzufassen:

- Die elementare Physikausbildung dreht sich um physikalische Begriffe, mit denen sich Phänomene in der Wahrnehmungswelt beschreiben lassen. In diesem Sinne bilden die Phänomene die Grundlage physikalischer Theorien.
- Andererseits kann nicht bestritten werden, daß die Interpretation von Phänomenen und die Aufmerksamkeit, die ihnen zuteil wird, von den Vorerfahrungen und Erwartungen abhängen, also theoriegeleitet sind:

*„Was ein Mensch sieht, hängt sowohl davon ab, worauf er blickt, wie davon, worauf zu sehen ihn seine visuell-begriffliche Erfahrung gelehrt hat.“* ([22], S. 125).

- Diese beiden Aussagen fließen in der Überzeugung zusammen, daß Phänomene und Begriffe sich gemeinsam entwickeln. Das ändert nichts

an der *Wagenscheinschen* Grundüberzeugung, die von *Jung* ([20], S. 13) folgendermaßen zusammengefaßt wird:

*„Die Begriffe vor den Phänomenen lehren, heißt, leere Worte lehren, Hülsen ohne Inhalt. Theorien lehren, ohne zu lehren, aus welchen Phänomenen sie herauswachsen, worauf sie sich beziehen und was sie in der Phänomenwelt leisten, ist Scheinwissen. Man kann mit diesen leeren Begriffen spielen lernen, und man kann sogar abfragen, welche Züge dieses Spiels der Befragte beherrscht - vielleicht sehr viele. Das hört sich dann so an, als habe einer Physik gelernt.“*

- Diese Positionen können in der folgenden didaktischen Konsequenz zusammengefaßt werden ([20], S. 35): Jede Theorie sollte so lange und so fest wie möglich in der Alltags- und Erfahrungswelt der Lernenden verankert werden. Dabei sollte dem Lernenden jedoch der Unterschied zwischen dem Phänomen auf der einen Seite und der Verwendung des Phänomens in der Theorie auf der anderen Seite klar werden. Er kann ganz gut verstehen, daß es keinen zwingenden Weg von den Phänomenen zur Theorie gibt. Theorie ist immer eine *produktive* Antwort auf die Phänomene!

In dieser Arbeit soll das Zusammenspiel zwischen Erfahrung und Konvention, zwischen Phänomen und Theorie am Beispiel einer bekannten physikalischen Begriffsbildung untersucht werden: am Beispiel des Flusses extensiver physikalischer Größen. Dabei konzentriere ich mich auf den Fluß der Energie durch elektromagnetische Anordnungen und Felder. Einerseits ist man durch die Diskussion von Problemen des Energietransportes mit der Vorstellung vertraut, daß Energie sich bewegen, fließen kann. Andererseits ist diese Vorstellung aber doch nicht so fest verankert wie z.B. die vom Fluß elektrischer Ladung, vom elektrischen Strom also. Dadurch ist es, so hoffe ich, leichter möglich, eine Sensibilität für die konventionellen Aspekte dieser Fließvorstellung zu erzeugen.

Der Energiebegriff spielt im Physikunterricht der allgemeinbildenden Schulen in den letzten Jahren eine ständig wachsende Rolle, die sich in dem immer größeren Raum widerspiegelt, der diesem Begriff in den Lehrplänen eingeräumt wird. Ein Anlaß dafür war sicher die Energiekrise der Jahre 1973/74, in der die Abhängigkeit insbesondere der westlichen Welt von einer ungehinderten Energiezufuhr einer breiten Öffentlichkeit bewußt wurde. Mindestens ebenso wichtig aber ist wohl die Bedeutung, die der Energie als strukturierendem und die Teilgebiete der Physik verbindendem Begriff zugewiesen

wird. Eine entscheidende Rolle spielt sicher auch die sich immer mehr durchsetzende Überzeugung, daß die Energie, verglichen mit den Größen „Kraft“ und „Arbeit“, die anschaulichere physikalische Größe ist, von der Schüler bereits vorwissenschaftlich ein Vorstellung haben, die sich weitgehend mit der wissenschaftlichen Bedeutung deckt.

Wurde die Energie früher als eine Art Bilanzierungsgröße eingeführt, die den Ablauf von Prozessen steuert (vielleicht an schönsten dargestellt von *Feynman* in seinem „Klötzchen-Bild“ ([10], S. 4-1f)), so beruht heute ihre Anschaulichkeit auf der Betonung ihres *extensiven* Charakters und ihrer *Mengenartigkeit*. Diese Eigenschaft hat nämlich zur Folge, daß man sich vorstellen kann, Energie sei in einem Körper enthalten und sie werde zwischen Körpern ausgetauscht.

Die dem Energiebegriff zugrundeliegende allgemeine Erfahrung beschreibt *Robert Mayer* ([30], S. 3) folgendermaßen:

*„Soll eine ruhende Masse in Bewegung gesetzt werden, so ist dazu ein Aufwand von Kraft erforderlich. Eine Bewegung entsteht nicht von selbst; sie entsteht aus ihrer Ursache, aus der Kraft. Ex nihilo nil fit. Ein Objekt, das, indem es aufgewendet wird, Bewegung hervorbringt, nennen wir Kraft. Die Kraft als Bewegungsursache, ist ein unzerstörliches Objekt. Es entsteht keine Wirkung ohne Ursache; keine Ursache vergeht ohne entsprechende Wirkung. Ex nihilo nil fit. Nil fit ad nihilum. Die Wirkung ist gleich der Ursache. Die Wirkung der Kraft ist wiederum Kraft.“*

Im physikalischen Sinne konkretisiert gehören dazu Erfahrungen, daß eine „Wirkung“ wie das Wärmer- oder Schnellerwerden eines Körpers immer einhergeht mit einer „Ursache“, z.B. der Abkühlung eines anderen Körpers, seinem Herabsinken oder einer körperlichen Anstrengung. Bei der Bildung des Energiebegriffes konzentriert man sich (statt auf den intensiven Aspekt der zu Größen wie „Temperatur“ und „Druck“ führt) auf den extensiven Aspekt der Phänomene, insbesondere auf die Erfahrung, daß durch eine doppelte Ursache (gleiche Zustandsänderung zweier gleicher Körper) eine größere Wirkung erzielt wird. (Das Zusammenspiel von Konvention und Erfahrung bei der Bildung physikalischer Begriffe wird z.B. von *Stegmüller* [49] beschrieben, siehe auch [1]). Die durch Idealisierung tatsächlicher Erfahrungen gewonnene Überzeugung von der Reversibilität mechanischer Vorgänge führt dazu, eine Erhaltungsgröße zu konstruieren. (In *Feynman*'s Klötzchen-Bild wird dieser Konstruktionsvorgang veranschaulicht. In [45] z.B. wird angedeutet, wie er den Leitfaden bei der Bildung des Energiebegriffes im Schulunterricht bilden kann.)

Die Unanschaulichkeit von Fernwirkungen, die Überzeugung also, daß sich Wirkungen nur kontinuierlich durch den Raum fortpflanzen können, führt schließlich dazu, Energieerhaltung nicht nur *global*, sondern auch *lokal* anzunehmen und den Energieaustausch zwischen zwei Systemen deshalb durch einen Energiefluß zu beschreiben.

Obwohl die Details dieses Flusses noch weiter über die zugrundeliegenden einfachen Phänomene hinausgehen als ihre Beschreibung durch den Austausch von Energie, ist darüber im elektromagnetischen Fall schon früh ein weitgehender Konsenz erreicht worden: Bei elektromagnetischen Vorgängen wird der Energiefluß durch den *Poynting*-Vektor  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$  beschrieben ([36]). Man ist mit dieser Beschreibung noch niemals in Widerspruch zur Erfahrung geraten. Ihre Aussagen widersprechen aber in vielen Fällen der unvoreingenommenen Erwartung:

- Ein elektrisch geladener Körper in einem homogenen Magnetfeld ist von ringförmigen Energieströmen umgeben.
- In einem Stromkreis fließt die Energie nicht durch die stromführenden Kabel. Sie strömt stattdessen außerhalb der Kabel an ihnen entlang.
- Die Details der Energieströmung hängen von der Umgebung des Stromkreises ab: Ein zweiter, von ersten galvanisch getrennter Stromkreis kann sogar dazu führen, daß die Verbraucher beider Kreise ihre Energie von der Quelle des jeweils anderen Kreises erhalten (siehe Abb. 4.7).
- In der Umgebung einer sendenden Antenne strömt die Energie nicht nur in radialer, sondern auch in meridionaler Richtung. Zeitweilig strömt sie sogar zur Antenne hin.

Trotz der Unanschaulichkeit solcher Aussagen wird die Richtigkeit dieser Darstellung, meist ohne nähere Begründung, behauptet:

- *„Diese mysteriöse zirkulierende Energieströmung, die zunächst so lächerlich erschien, ist absolut notwendig.“* ([11], S. 27-17)
- *„Das kindliche Modell von den energiebeladenen Elektronen, welche die elektrische Energie gleichsam vom Erzeuger zum Verbraucher tragen, geht weit an der Wirklichkeit vorbei.“* ([37], S. 48)

Oft werden die Aussagen der *Poyntingschen* Darstellung des elektromagnetischen Energieflusses eingeübt, ohne daß Alternativen diskutiert werden. Zweifelhafte Schüler werden mit Scheinargumenten zum Schweigen gebracht:

*„Ergänzungsfrage: ‚Wer transportiert die Energie im Leiter?‘*

*Antwort: ‚Die Elektronen‘ (ca. 70% (der Schüler)).*

*Ergänzungsfrage: ‚Worin unterscheiden sich die Elektronen als ‚Energieträger‘, wenn sie a) zunächst vom Minuspol der Energiequelle zur Lampe und b) sodann von der Lampe zum Pluspol der Energiequelle fließen?‘*

*Ergebnis: Daß die Energie nicht mit den Elektronen zur Energiequelle zurückfließt, war nach der Diskussion allen Schülern klar und nachfolgend der Widerspruch, daß sich Elektronen voneinander unterscheiden sollen, je nachdem ob sie vor oder hinter der Lampe fließen sollen.“ ([42], S. 272)*

*„Zielfrage 4b: Was bedeuten die Begriffe Lageenergie bzw. potentielle Energie?“*

*Antwort 4b: Diejenigen Schüler, die zuvor noch diese Begriffe verwendet und damit die Vorstellung verbunden hatten, das hochgehobene Kreidestück müsse sich - weil es ja potentielle Energie ‚hat‘ und Arbeit verrichten könne - ‚irgendwie‘ geändert haben, brachten sich selbst zur Einsicht, daß potentielle Energie nichts anderes als gravitative Feldenergie ist.“ ([42], S. 283)*

In dieser Arbeit gehe ich der Frage nach, ob die *Poyntingsche* Darstellung des Energieflusses durch elektromagnetische Felder tatsächlich eine notwendige Folge der Mengenartigkeit der Energie ist oder ob sie nicht vielmehr auf weiteren konventionellen Entscheidungen beruht. Wenn das der Fall ist - und das ist das Ergebnis dieser Arbeit -, dann scheint es mir besser, *das* lernten die Schüler. Das Nachdenken über die empirischen Grundlagen und die Diskussion möglicher Alternativen bietet eine günstige Gelegenheit, etwas *über* Physik zu lernen.

In Kapitel 2 werden zunächst die Vorstellung vom Fluß physikalischer Größen und ihre Grundlagen allgemein erläutert. Dabei soll deutlich werden, daß die hier diskutierten Fragen nur Spezialfälle von Problemen darstellen, die bei der Einführung aller extensiven Größen auftreten. Die Aussagen dieses Kapitels werden in Kapitel 3 am Beispiel der Energie konkretisiert, und zwar insbesondere anhand der Energieübertragung mit Hilfe elektrischer Ströme und elektromagnetischer Felder. Dabei wird an einen Umstand erinnert, der zwar lange bekannt, aber anscheinend fast vergessen ist:

- *„Ehe wir uns mit einigen Anwendungen der Poyntingschen Formeln ... beschäftigen, möchten wir sagen, daß wir sie nicht wirklich ‚beweisen‘ haben. Wir haben lediglich ein mögliches  $u$  und ein mögliches  $\vec{S}$*

*gefunden. . . . De facto gibt es unendlich viele verschiedene Möglichkeiten für  $u$  und  $\vec{S}$ , und bisher hat noch niemand über eine experimentelle Möglichkeit nachgedacht, mit der man sagen könnte, welche die richtige ist.“ ([11], S. 27-8)*

- *„Die Frage, inwieweit andere Lösungen . . . ebenfalls sinnvoll sind, ist bisher kaum diskutiert worden. Man begnügt sich allenthalben mit der durch (den Poyntingschen Ausdruck) gegebenen einfachsten Lösung, denn  $\vec{S}$  ist sowieso nicht direkt meßbar.“ ([37], S. 48)*

Die Unbestimmtheit, mit der Ausdrücke für die Energiedichte  $u$  und die Energiestromdichte  $\vec{S}$  aus der Kontinuitätsgleichung für die Energie (der Forderung nach lokaler Energieerhaltung) gefolgert werden können, wird benutzt, der *Poyntingschen* Darstellung des Energieflusses in elektromagnetischen Feldern drei Alternativen gegenüberzustellen, von denen zwei bereits in der Literatur diskutiert wurden. Außerdem werden Argumente diskutiert, mit deren Hilfe die Möglichkeit alternativer Darstellungen bestritten wird. Es wird gezeigt, daß diese Argumente fehlerhaft (z.B. [53]) oder unvollständig (z.B. [12]) sind oder starke zusätzliche konventionelle Forderungen darstellen (z.B. [5]).

Dadurch überzeugt, daß die Diskussion von Alternativen zur *Poyntingschen* Darstellung legitim ist, werden in den nächsten Kapiteln Folgerungen aus den verschiedenen Darstellungen miteinander verglichen. In Kapitel 4 wird zunächst der Energietransport durch Gleichströme und langsam veränderliche Ströme untersucht. Dabei zeigt sich, daß es möglich ist, bei statischen Problemen die Energieflüsse zum Verschwinden zu bringen und bei stationären Strömen den Energiefluß in den Kabeln zu lokalisieren. Gespeichert wird dann die Energie in elektrisch geladenen Körpern („potentielle Energie elektrischer Ladungen“) und in stromführenden Drähten („potentielle Energie elektrischer Ströme“).

In Kapitel 5 wird der Energiefluß durch einen Transformator untersucht. Dieses Problem ist in den letzten Jahren in mehreren Arbeiten behandelt worden - allerdings nur vom *Poyntingschen* Standpunkt aus. Der Transformator spielt für diese Arbeit insofern eine gewisse Rolle, als durch ihn Energie von einem Generator in den Verbraucher eines von ihm galvanisch getrennten Stromkreises gelangt. Im Gegensatz zu den Ergebnissen der meisten Veröffentlichungen zeigt sich, daß die Energie in der *Poynting*-Darstellung im wesentlichen um den Transformator herumfließt, der Transformator also an der Energieübertragung gar nicht beteiligt ist. Es ist aber möglich, durch eine alternative Darstellung den Energiefluß entsprechend der Erwartung zu lokalisieren. Die Energie geht dann von den Wicklungen der Primärspule auf die der Sekundärspule über. Beim Transformator mit geschlossenem Eisenkern

kann man eine Darstellung finden, die den Energiefluß - in vollkommener Analogie zur elektrischen Zweidrahtleitung - in den Schenkeln des Eisenkernes lokalisiert.

In den beiden letzten Kapiteln werden hochfrequente Felder untersucht. In Kapitel 6 zeigt sich, daß auch bei Hochfrequenzwellenleitern Energiedichte und -strömung in den Leitern lokalisiert werden können. Als Beispiel für die Energieübertragung durch elektromagnetische Wellen wird in Kapitel 7 die Energieabstrahlung eines *Hertz*schen Dipoles behandelt. Natürlich fließt dabei in allen Darstellungen die Energie durch Vakuum. Die alternativen Darstellungen unterscheiden sich jedoch in den Details wesentlich vom *Poynting*-Bild und sind z.T. deutlich weniger komplex. Im Extremfall ist beim harmonisch schwingenden Dipol die Stromdichte überall (d.h. auch im Nahfeld) radial nach außen gerichtet und - ebenso wie die Energiedichte - zeitlich konstant. Es scheint so, als eröffneten selbst diese Unterschiede keine Möglichkeit, experimentell zwischen den verschiedenen Alternativen zu unterscheiden.

In der abschließenden Diskussion plädiere ich dafür, die Aufmerksamkeit der Lernenden stärker auf die empirische Basis physikalischer Aussagen zu konzentrieren und dabei deutlich zu machen, daß die Phänomene verschiedene Möglichkeiten zu ihrer Beschreibung und Interpretation offenlassen. Wenn jedoch die Mengenartigkeit der Energie betont wird, wird man kaum verhindern können, daß sich Lernende detaillierte Vorstellungen über die Lokalisierung der Energie machen. Es ist dann sinnvoll, mehrere Möglichkeiten anzudeuten und Argumente für eine begründete Entscheidung anzubieten. Einfachheit und Anschaulichkeit sind Beispiele solcher Argumente.



# Kapitel 2

## Vom Fließen physikalischer Größen

### 2.1 Physikalische Flüsse bei statischen und stationären Vorgängen

Nach *Falk* und *Herrmann* ([8], S. 24) offenbaren

„klassische und moderne Physik, aber auch unterschiedliche Gebiete der Physik, ... eine auffallende Einheitlichkeit, wenn man als Fundamentalbegriffe mengenartige Größen verwendet. ... Das Wort mengenartig bedeutet, daß die Größe als eine Art Substanz gedacht werden darf, daß sie an unterschiedlichen Stellen im Raum sein kann, kurz, daß es eine Dichte zu ihr gibt und daß sie strömen kann, es also einen Strom der Größe gibt. Beispiele solcher Größen sind: Energie, Impuls, Drehimpuls ...“

Zum Beispiel lassen sich auf den ersten Blick so verschieden aussehende Vorgänge wie das Leuchten einer Lampe in einem Stromkreis und das Ziehen eines Klotzes über eine raue Oberfläche völlig analog beschreiben, wenn man die beobachtbaren Phänomene wie Wärmeentwicklung, mechanische Spannungen, elektrische Felder usw. auf das Fließen von Energie und elektrischer Ladung bzw. Impuls zurückführt.

In beiden Fällen gibt es dann einen offenen Strom (nämlich der Energie) und einen geschlossenen (divergenzfreien) Strom (der Ladung bzw. des Impulses).

Wenn man sich auch - zumindest beim elektrischen Stromkreis - an solche Strömungsbilder gewöhnt hat, so sind sie doch insofern überraschend, als bei den Vorgängen selbst entsprechende *Bewegungen* nicht zu beobachten sind.

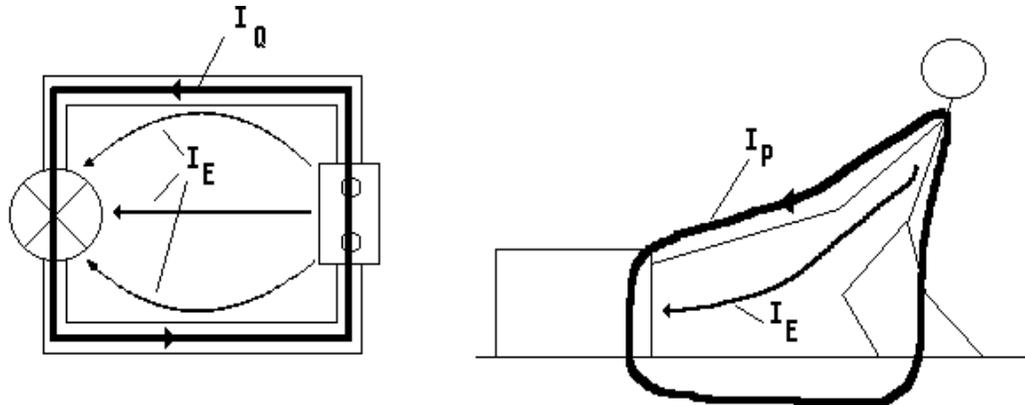


Abbildung 2.1: Energiestrom und „Trägerstrom“ bei verschiedenen physikalischen Vorgängen, dem Leuchten einer Glühlampe in einem Stromkreis (links) und dem Ziehen eines Klotzes über eine rauhe Unterlage

Ladung und Impuls ändern sogar an keiner Stelle der Versuchsanordnung ihren Wert. Im folgenden werden einige Anmerkungen zu der fachlichen Problematik dieser Beschreibung gemacht und weitere Gesichtspunkte genannt, die bei der fachdidaktischen Diskussion dieser Betrachtungsweise berücksichtigt werden müssen.

## 2.2 Grundlagen

### 2.2.1 Empirische Grundlagen

Die Erfahrung zeigt, daß bei der Wechselwirkung zweier Systeme  $S$  und  $S'$  die Energie  $E$  und einige andere extensive Größen  $G_1, G_2, \dots$  insgesamt ihren Wert nicht ändern.

$$\dot{E} + \dot{E}' = 0 \quad \text{und} \quad \dot{G}_i + \dot{G}'_i = 0. \quad (2.1)$$

Zwischen den Änderungen der verschiedenen Größen bestehen folgende Beziehungen (Gibb'sche Fundamentalform der Systeme):

$$\dot{E} = k_1 \dot{G}_1 + k_2 \dot{G}_2 + \dots \quad \text{und} \quad \dot{E}' = k'_1 \dot{G}'_1 + k'_2 \dot{G}'_2 + \dots \quad (2.2)$$

### 2.2.2 Interpretationen

Die physikalische Beschreibung der Wechselwirkung geht jedoch über diese Gleichungen hinaus, indem die Abnahme einer Größe  $G$  beim einen und die

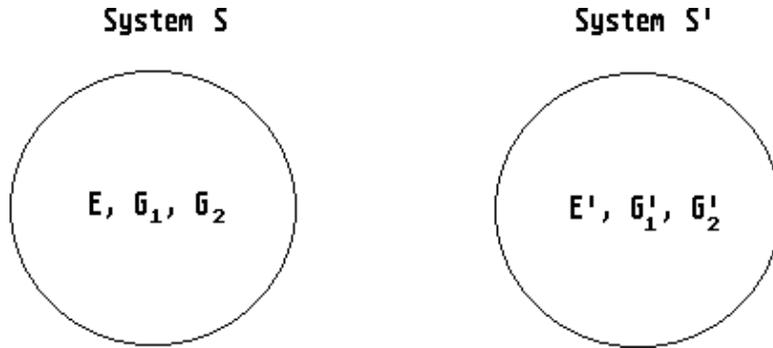


Abbildung 2.2: Beschreibung zweier Systeme durch extensive Größen

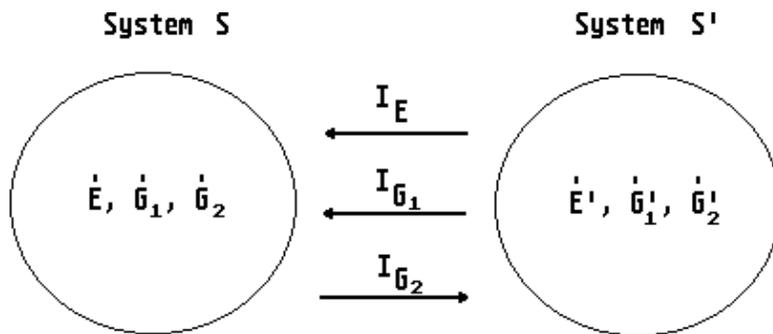


Abbildung 2.3: Beschreibung der Wechselwirkung zweier Systeme durch die Änderung extensiver Größen und dazu gehörende Flüsse

entsprechende Zunahme beim anderen System als *Austausch dieser Größe zwischen den Systemen* interpretiert, die Änderung der Größe also auf einen Zu- oder Abfluß mit der Stromstärke  $I_G$  zurückgeführt wird (Abb. 2.3).

$$\dot{E} + I_E = 0 \quad \text{und} \quad \dot{G}_i + I_{G_i} = 0 \quad (2.3)$$

Entsprechend (2.2) ist dann die Energiestromstärke mit den Stromstärken der anderen Größen verknüpft:

$$I_E = k_1 I_{G_1} + k_2 I_{G_2} + \dots \quad (2.4)$$

Darüberhinaus stellt man sich vor, Größe und dazugehörige Strömung seien mit den Dichten  $\rho_G$  und  $\vec{j}_G$  im Raum verteilt, man könne also nicht nur sagen, *daß* die Größe ausgetauscht werde, sondern sogar, *wie* das geschehe (Abb. 2.4):

Die makroskopisch an den Systemen festgestellte Erhaltung der Größen wird auch mikroskopisch vorausgesetzt. Deshalb müssen Dichte und Strom-

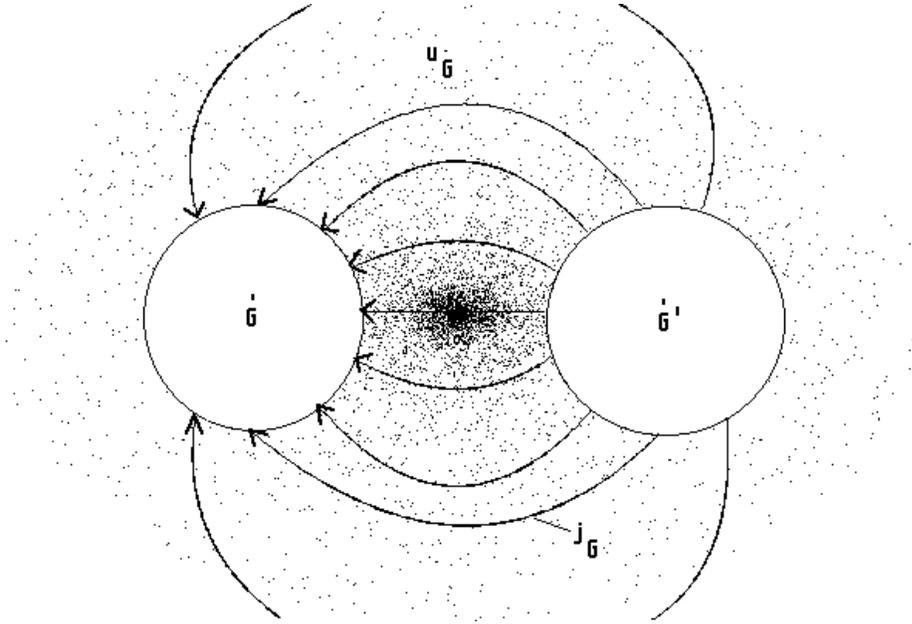


Abbildung 2.4: Detaillierte Beschreibung des Größenflusses durch Stromdichte und Dichte (die durch unterschiedlich dichte Punktierung gekennzeichnet wird)

dichte die Kontinuitätsgleichung erfüllen:

$$\dot{\rho}_G + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_G = 0 \quad (2.5)$$

### 2.2.3 Suggestionen

Diese der Hydrodynamik entlehnte Beschreibung weckt Assoziationen, die sehr anschaulich sind, fachlich aber nur zum Teil gerechtfertigt werden können:

- Die Einführung von Dichte und Stromdichte erweckt den Eindruck, diese Größen seien *eindeutig* bestimmt.
- Die Sprechweise vom Größenstrom leistet der Vorstellung von „Individuen“ oder „Paketen“ Vorschub, die sich mit *meßbarer Geschwindigkeit bewegen*.
- Die Bezeichnung der weiteren Ströme als „*Trägerströme*“ der Energie ([8], S. 24) suggeriert eine feste Verbindung zwischen „Träger“ und „Last“ und damit gleiche Strömungswege, zumindest aber gleiche Strömungsgeschwindigkeiten.

## 2.3 Probleme

### 2.3.1 Fachliche Probleme

Die Beschreibung der Wechselwirkung zweier Systeme durch detaillierte Strömungsbilder für mehrere Größen geht offensichtlich weit über die Tatsache der Erhaltung dieser Größen und andere auf einfache Weise an diesem Phänomen zu sammelnde Erfahrungen hinaus. Insofern kann man gar nicht erwarten, daß man zu einfachen Aussagen kommen kann, ohne daß umfangreiche zusätzliche Erfahrungen und Verabredungen hinzugenommen werden. Formal äußert sich das z.B. darin, daß Dichte und Stromdichte einer Größe durch die Kontinuitätsgleichung (2.5) nicht eindeutig festgelegt werden. Man kann u.a. beliebige Ringströme hinzufügen, weil diese divergenzfrei sind.

Die Strömungsgeschwindigkeit taucht in den bisherigen Gleichungen überhaupt nicht auf. Aus der Vorstellung wandernder „Individuen“ folgt jedoch die Beziehung

$$\vec{j}_G = \rho_G \cdot \vec{v}_G \quad (2.6)$$

Diese ist jedoch problematisch:

- Gleichung (2.6) kann nicht aufrechtgehalten werden, wenn an die Strömungsgeschwindigkeit  $\vec{v}_G$  einschränkende Bedingungen gestellt werden, z.B. die Voraussetzung, daß  $\vec{v}_G$  mit der Geschwindigkeit des „Trägers“ übereinstimmt ([15]).
- Da keine „Individuen“ beobachtbar sind, kann die Strömungsgeschwindigkeit  $\vec{v}_G$  nur durch (2.6) bestimmt werden. Solange aber  $\vec{j}_G$  und  $\rho_G$  nicht eindeutig sind, wird dadurch auch  $\vec{v}_G$  nicht festgelegt.
- Wie in den anfangs genannten Beispielen des stromführenden Drahtes und des unter Spannung stehenden Erdbodens ist oft die Dichte anscheinend Null, die dazu gehörende Stromdichte jedoch nicht. In solchen Fällen kann man sich dadurch helfen, daß man (2.6) durch eine komplexere Beziehung ersetzt, z.B.

$$\vec{j}_G = \rho_G \vec{v}_G + \rho_G^* \vec{v}_G^* \quad (2.7)$$

Dadurch wächst allerdings die Zahl der zu bestimmenden Größen.

- Auch die Erwartung einer der Gibb'schen Fundamentalform (2.2) entsprechenden einfachen Beziehung zwischen den Stromdichten von Energie- und Trägerstrom

$$\vec{j}_E = k_1 \vec{j}_{G_1} + k_2 \vec{j}_{G_2} + \dots$$

erweist sich als trügerisch: Im allgemeinen stimmen weder die Strombahnen, noch, wenn sie überhaupt sinnvoll angegeben werden können, die Strömungsgeschwindigkeiten überein. Am bekanntesten ist das im Falle des elektrischen Stromes, wo man sich daran gewöhnen mußte, daß die Elektronen sehr langsam durch die Drähte wandern, die Energie aber nach dem Einschalten sehr schnell an der Lampe zur Verfügung steht. Außerdem strömt sie (nach *Poynting*) nicht durch die Kabel, sondern durch den Zwischenraum.

### 2.3.2 Didaktische Probleme

Gerade für Lehrer ist es wichtig, sich diesen Spielraum und diese scheinbaren Widersprüche bewußt zu machen. Viele Lernschwierigkeiten beruhen nämlich m.E. darauf, daß Schülern aufgrund anderer bzw. ganz fehlender Vorerfahrungen oft ganz andere Interpretationen der beobachteten Phänomene und damit ganz andere physikalische Aussagen naheliegen. Bei der Einführung von Größenströmen sollte deshalb der Modellcharakter hervorgehoben und die Argumente deutlich gemacht werden, die für bzw. gegen ein bestimmtes Bild sprechen. So schreibt z.B. *Herrman* ([16], S. 25):

*„Indem wir sagen, zwischen den Körpern fließe ein Strom, machen wir uns ein Bild von dem Raum zwischen den Körpern. ... Dafür, daß wir den Zustand mit dem Wort „Strom“ bezeichnen beschreiben, haben wir zwei Argumente: Die Beschreibung gibt das Verhalten der Körper ... richtig wieder. ... Das Gebiet zwischen den Körpern erfährt eine beobachtbare Veränderung. ... Weitere Gründe für unsere Annahme eines Stromes gibt es nicht. Es ist wichtig, sich das klarzumachen, denn das Wort ‚Strom‘ im normalen Sprachgebrauch ... beinhaltet viel mehr. ...“*

Bei solchen Überlegungen wird vielleicht auch nachvollziehbar, warum sich die Fließvorstellung z.B. beim elektrischen Strom durchgesetzt hat, beim Impuls dagegen (noch?) nicht.

Insbesondere sollte untersucht werden, ob sich die neu einzuführenden Größen *Dichte*, *Stromdichte* und evtl. *Strömungsgeschwindigkeit* durch zusätzliche Erfahrungen eindeutig machen lassen. Es spricht jedoch vieles dafür, daß das nicht der Fall ist. Wie aber soll sich der Lehrende bei fehlender - bzw. auf dem angestrebten Niveau nicht verständlich zu machender - Eindeutigkeit verhalten? Soll er die Richtigkeit eines Bildes behaupten?

*„Die in (einen hochgehobenen) Körper geflossene Energie hat sich in ihm aber nicht angehäuft. Das äußert sich darin, daß in*

*einem Gravitationsfeld ein Körper überall die Masse  $m$  und damit dieselbe Ruheenergie  $E = mc^2$  hat. Daraus muß man schließen, daß die Energie in das Gravitationsfeld weitergeflossen und dort gespeichert worden ist.“ ([50], S. 49)*

Oder soll er Wahlmöglichkeiten verdeutlichen und gegeneinander abwägen und evtl. je nach Problem unterschiedliche Bilder verwenden? Die Antwort auf diese Fragen hängt sicher vom Adressatenkreis ab. Der Rückgriff auf die Relativitätstheorie z.B. wäre im Schulunterricht auch dann wenig hilfreich, wenn das Argument stichhaltig wäre.

Mit den Flüssen physikalischer Größen können anscheinend Vorgänge aus den verschiedenen Bereichen der Physik weitgehend analog beschrieben werden. Diese Betrachtungsweise trägt insofern wesentlich zur Vereinheitlichung der Physik bei. Aufgrund der mechanischen Analogie ist die Beschreibung sehr anschaulich und sollte dadurch Schülern auf der qualitativen Ebene schon früh eine selbständige Anwendung auf relativ komplexe Sachverhalte ermöglichen. Allein diese Gesichtspunkte lassen es mir sehr lohnend erscheinen, diese Ideen gründlich zu durchdenken, zu diskutieren und evtl. zu erproben.

Die Anschaulichkeit beruht jedoch auf Assoziationen, die früher oder später korrigiert werden müssen, insbesondere auf der Vorstellung sich bewegender unterscheidbarer „Individuen“ mit eindeutig bestimmbarer Dichte, Stromdichte und Geschwindigkeit. Schwierigkeiten sind deshalb zu erwarten, wenn dieses Problem offensichtlich wird, z.B. wenn sich herausstellt, daß

- die Frage nach der Fließgeschwindigkeit nicht befriedigend beantwortet werden kann (siehe z.B. *Heiduck* [15]),
- die Energie entlang anderer Wege strömt als ihre Träger oder
- sich je nach gewähltem Bezugssystem ganz verschiedene Strömungsbilder ergeben.

Es erhebt sich dann die Frage, was von der Anschaulichkeit der Fließvorstellung bleibt, wenn man sie auf den fachlichen Kern, also auf die Existenz von (nicht eindeutig bestimmbarer) Dichte und Stromdichte und auf die Kontinuitätsgleichung reduziert.



# Kapitel 3

## Stromdichte und Dichte der Energie im elektromagnetischen Feld

### 3.1 Vorbemerkungen

In den vergangenen Jahren hat der Energiebegriff in der fachdidaktischen Diskussion eine große Rolle gespielt. Als Folge davon tauchte die Frage nach den Details und den Mechanismen des Energietransportes auf, eine Frage, die durch die explizite Betrachtung der Energie als „eine Art Substanz“, zu der es eine Dichte gibt und die strömen kann (*Falk/Herrmann* [8]), zusätzliche Bedeutung erlangte. Deshalb erschienen in der letzten Zeit mehrere Aufsätze (*Ebinghaus* [6], *Hecht* [14], *Rang* [37], *Jäkel* [24], *Heald* [13], *Nägerl/Henze* [32]), in denen am Beispiel der Energieverteilung und -speicherung durch elektrische Stromkreise und elektromagnetische Felder in konkreten Fällen (Spule, Kondensator, Doppel- bzw. Koaxialkabel, Transformator und Dipolstrahlung) der Weg der Energie untersucht wird.

Ein Ergebnis aller dieser Aufsätze ist, daß sich die Details der Energieströmung in überraschender Weise von der naiven Vorstellung unterscheiden. Alle Autoren benutzen nämlich die auf *Poynting* [36] und *Maxwell* [29] zurückgehenden Ausdrücke für die Energiestromdichte und die Energiedichte. Danach treten z.B. auch in Fällen, in denen keine Energieänderungen zu beobachten sind (in statischen elektromagnetischen Feldern), Energieströmungen auf und fließt die Energie bei elektrischen Leitungen nicht durch die Drähte, sondern außerhalb an ihnen entlang.

Zweck dieses Kapitels ist der Nachweis, daß die *Poyntingsche* nur eine von vielen im wesentlichen gleichberechtigten Beschreibungen des Energie-

transportes ist. Eine davon, die hier meiner Kenntnis nach zum ersten Mal diskutiert wird, entspricht weitgehend der „naiven“ Vorstellung, nach der

- die Energie i.a. durch die Drähte strömt,
- elektrische Ladungen mit Energie „beladen“ sind und
- keine Energie fließt, wenn nirgends ein energetischer Vorgang zu beobachten ist, wenn sich also die Energie keines der beteiligten Systeme ändert.

Um diese weitgehenden Behauptungen erläutern zu können, soll zunächst die Herleitung des *Poynting*'schen Satzes angedeutet werden.

## 3.2 Maxwell-Gleichungen und elektrodynamische Potentiale

Die folgenden Überlegungen und Umformungen beruhen auf der Darstellung elektrischer und magnetischer Felder mit Hilfe elektrodynamischer Potentiale und auf den Zusammenhängen zwischen den Feldstärken einerseits und den Strömen und Ladungen andererseits, wie sie durch die *Maxwell*-Gleichungen beschrieben werden. Deshalb werden diese Beziehungen hier zunächst zusammengestellt:

### Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (3.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad (3.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \dot{\vec{D}} \quad (3.4)$$

Im folgenden werden immer lineare Beziehungen zwischen  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$  einerseits und  $\vec{D}$  und  $\vec{B}$  andererseits vorausgesetzt:

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} \quad (3.5)$$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H} \quad (3.6)$$

### Elektrodynamische Potentiale

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (3.7)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \dot{\vec{A}} \quad (3.8)$$

### Eichtransformationen

Die Potentiale sind durch die Gleichungen (3.7) und (3.8) nicht eindeutig bestimmt. Folgende Transformationen ändern vielmehr nichts an den Feldstärken:

$$\begin{aligned} \vec{A} &\longrightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda \\ \Phi &\longrightarrow \Phi' = \Phi - \dot{\Lambda} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Dabei ist  $\Lambda = \Lambda(\vec{r}, t)$  eine beliebige skalare Funktion des Ortes und der Zeit. In dieser Arbeit werden im wesentlichen die folgenden zwei Eichungen benutzt:

$$\text{Coulomb-Eichung} : \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad \wedge \quad \nabla^2 \Phi = \frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0} \quad (3.10)$$

$$\text{Lorentz-Eichung} : \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \dot{\Phi} = 0 \quad \text{mit} \quad \frac{1}{c^2} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \quad (3.11)$$

Erfüllt die skalare Funktion  $\Lambda$  die Bedingung

$$\nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = 0, \quad (3.12)$$

dann erfüllen Potentiale, die vor der Umeichung die Bedingung der *Lorentz-Eichung* erfüllten, sie auch nachher.

## 3.3 Poyntingscher Satz

Bewegt sich ein elektrisch geladener Körper mit der Ladung  $Q$  in einem elektrischen Feld mit der Feldstärke  $\vec{E}$ , dann ändert sich seine Energie  $W_{mech}$ :

$$\frac{dW_{mech}}{dt} = Q\vec{v} \cdot \vec{E} \quad (3.13)$$

Bei kontinuierlich verteilter Ladung gilt entsprechend für die Energiedichte  $u_{mech}$ :

$$\frac{du_{mech}}{dt} = \vec{j} \cdot \vec{E} \quad (3.14)$$

( $\vec{j}$  = Stromdichte). Fordert man lokale Energieerhaltung, so muß die Bilanz durch eine Abnahme der Feldenergie am selben Ort oder durch einströmende Feldenergie ausgeglichen werden:

$$\frac{du_{mech}}{dt} = -\frac{\partial u_{Feld}}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \vec{S}_{Feld} \quad (3.15)$$

Wie sich die Energiedichte  $u$  und die Energiestromdichte  $\vec{S}$  (der Index „Feld“ wird im folgenden weggelassen) durch bekannte, das Feld beschreibende Größen ausdrücken lassen, ist zunächst unbekannt. Aus den *Maxwell*-Gleichungen folgt jedoch:

$$\begin{aligned} \vec{j} \cdot \vec{E} &\stackrel{(3.4)}{=} (\vec{\nabla} \times \vec{H} - \dot{\vec{D}}) \cdot \vec{E} \\ &= -\vec{E} \cdot \dot{\vec{D}} + \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \\ &\stackrel{(9.17)}{=} -\vec{E} \cdot \dot{\vec{D}} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \\ \Rightarrow \vec{j} \cdot \vec{E} &\stackrel{(3.3)}{=} -\vec{E} \cdot \dot{\vec{D}} - \vec{H} \cdot \dot{\vec{B}} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Vergleich der Gleichungen (3.14), (3.15) und (3.16) ergibt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) \right] + \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \quad (3.17)$$

Mehr kann aus der Forderung nach lokaler Energieerhaltung allein nicht über die Abhängigkeit der Energiedichte und der Energiestromdichte von den Feldstärken gefolgert werden. Gleichung (3.17) legt jedoch folgende Identifizierung nahe:

$$\begin{aligned} \vec{S}_P &= \vec{E} \times \vec{H} \\ u_P &= \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Der Index  $P$  soll auf *Poynting* [36] hinweisen, obwohl der Ausdruck für die Energiedichte bereits von *Maxwell* [29] benutzt wurde.



Strömungsfeld kompensiert werden: Die Kontinuitätsgleichung wird auch erfüllt, wenn man zugleich

$$\vec{S} = \vec{S}_P + \dot{\vec{Y}} \quad \text{und} \quad u = u_P - \vec{\nabla} \cdot \vec{Y}$$

wählt.

Auch eine Kombination beider Möglichkeiten erfüllt die Kontinuitätsgleichung:

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \vec{E} \times \vec{H} + \vec{\nabla} \times \vec{X} + \dot{\vec{Y}} \\ u &= \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}) - \vec{\nabla} \cdot \vec{Y} \end{aligned} \quad (3.19)$$

In der Literatur wurden viele Alternativen vorgeschlagen (siehe z.B. [47]). Im folgenden sollen neben der *Poyntingschen* jedoch nur die von *Lai* [26] und *Hines* [19] vorgeschlagenen diskutiert und einem dritten Vorschlag gegenübergestellt werden, der bisher noch nicht diskutiert worden ist.

### 3.4.1 Hines-Darstellung

Ausgangspunkt des Vorschlages von *Hines* [19] ist eine von *Macdonald* [31] vorgeschlagene Darstellung, die einer Festlegung

$$\vec{X} = 0 \quad \vec{Y} = \frac{1}{2} (\vec{A} \times \vec{H})$$

in (3.19) entspricht. Nachdem *Hines* einige Einwände gegen diese Darstellung entkräftet hat, erweitert er sie folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \vec{X}_H &= \Phi \vec{H} \quad \text{und} \quad \vec{Y}_H = \frac{1}{2} (\vec{A} \times \vec{H}) \quad \implies \\ \vec{S}_H &= \vec{E} \times \vec{H} + \vec{\nabla} \times \Phi \vec{H} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A} \times \vec{H}) \\ &\stackrel{(9.14)}{=} \vec{E} \times \vec{H} + \underbrace{\vec{\nabla} \Phi \times \vec{H}}_{(-\vec{E}-\dot{\vec{A}}) \times \vec{H}} + \underbrace{\Phi \vec{\nabla} \times \vec{H}}_{\Phi(\vec{j}+\dot{\vec{D}})} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A} \times \vec{H}) \\ u_H &= u_P - \frac{1}{2} \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{H}) \stackrel{(9.17)}{=} u_P - \frac{1}{2} [\vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H})] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \vec{S}_H &= \frac{1}{2} \left( \vec{A} \times \dot{\vec{H}} - \dot{\vec{A}} \times \vec{H} \right) + \Phi(\vec{j} + \dot{\vec{D}}) \\ u_H &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \vec{A} \cdot \dot{\vec{D}} + \frac{1}{2} \vec{A} \cdot \vec{j} \end{aligned}} \quad (3.20)$$

Da sich die Energiedichte dieser Darstellung nicht von der *Macdonald*'s unterscheidet, stimmen beider Aussagen weitgehend überein.

*„However, in the case of the static fields just mentioned,  $\vec{Q}$  ( $\triangleq \vec{S}$ ) vanishes. This is the physically acceptable result which the modification was designed to yield.“ ([19], S. 127)*

### 3.4.2 Lai-Darstellung

*Lai* modifiziert die Darstellung von *Hines* und korrigiert damit das vermeintlich falsche Ergebnis, daß sich in *Hines*' Darstellung für die Strahlungsleistung eines *Hertz*schen Dipols ergibt:

*„Unlike the failure of the Hines choice  $\vec{S}_H$  for the energy flow vector, the present choice  $\vec{S}_N$  ( $\triangleq \vec{S}_L$ ) can account for the power radiated by an accelerated charge.“ ([26], S. 842)*

$$\vec{X}_L = \Phi \vec{H} \quad \text{und} \quad \vec{Y}_L = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \vec{S}_L = \vec{S}_H - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A} \times \vec{H}) \\ u_L = u_P \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \vec{S}_L &= -\dot{\vec{A}} \times \vec{H} + \Phi(\vec{j} + \dot{\vec{D}}) \\ u_L &= u_P \end{aligned}} \quad (3.21)$$

Als Vorteile seines Vorschlages führt er an, daß

- *„the energy flows along the wire at a rate of  $\Phi \vec{j}$  when a constant current flows through a wire,*
- *there is no energy flow in static superposed electric and magnetic fields in the absence of currents, and*
- *the energy comes down the wires for a slowly charging capacitor.“*

### 3.4.3 Neue Darstellung

In beiden alternativen Darstellungen kommt auch im Falle einer langsamen Stromsteigerung in einer Spule die Energie durch die Leitungen. Anders als bei *Poynting* und *Lai* wird sie aber bei *Hines* nicht im magnetischen Feld, sondern in den Spulenwicklungen gespeichert, eine Aussage, die gut zu der Vorstellung „potentieller Energie“ paßt, da sich die Spulenwindungen gegenseitig anziehen.

Will man eine entsprechende Aussage auch für die Aufladung eines Kondensators erreichen, dann muß man den Ausdruck für die Energiedichte so abändern, daß im statischen Fall auch der elektrische Anteil der Feldenergie verschwindet. Das war meine ursprüngliche Motivation für den folgenden Vorschlag:

$$\vec{X}_n = \Phi \vec{H}, \vec{Y}_n = \frac{1}{2} (\vec{A} \times \vec{H} - \Phi \vec{D}) \implies \begin{cases} \vec{S}_n = \vec{S}_H - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\Phi \vec{D}) \\ u_n = u_H + \frac{1}{2} \nabla \cdot (\Phi \vec{D}) \\ = u_H + \frac{1}{2} \left( \underbrace{\vec{D} \cdot \nabla \Phi}_{\vec{D} \cdot (-\vec{E} - \dot{\vec{A}})} + \Phi \underbrace{\nabla \cdot \vec{D}}_{\rho} \right) \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} \vec{S}_n = \vec{S}_H - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\Phi \vec{D}) \\ = \frac{1}{2} (\vec{A} \times \dot{\vec{H}} - \dot{\vec{A}} \times \vec{H} + \Phi \dot{\vec{D}} - \dot{\Phi} \vec{D}) + \Phi \vec{j} \\ u_n = \frac{1}{2} (\vec{A} \cdot \dot{\vec{D}} - \dot{\vec{A}} \cdot \vec{D} + \vec{A} \cdot \vec{j} + \Phi \rho) \end{cases} \quad (3.22)$$

## 3.5 Unentscheidbarkeit

Solange man nur von der Kontinuitätsgleichung, also der lokalen Energieerhaltung, ausgeht, lassen sich keine Einschränkungen für die Zusatzfelder  $\vec{X}(\vec{r}, t)$  und  $\vec{Y}(\vec{r}, t)$  in Gleichung (3.19) finden. Man muß nach zusätzlichen physikalischen Gesichtspunkten suchen und prüfen, inwieweit sie eine Entscheidung ermöglichen.

Eine erste Überlegung dieser Art hat *Birkeland* [5] angestellt, nachdem *Hertz* ([18], S. 234) auf die Problematik des Schlusses von einer integralen auf eine differentielle Bilanz hingewiesen hatte. *Birkeland* forderte vom Vektor der Energiestromdichte, daß er nur von den Feldstärken an den jeweiligen Orten abhängig ist. Er schloß damit eine Abhängigkeit von den Ableitungen der

Feldstärken und von den Potentialen von vornherein aus. Weiterhin benutzte er den *Maxwellschen* Ausdruck für die Energiedichte und setzte damit  $\vec{Y} = 0$  voraus. Unter diesen Annahmen zeigte *Birkeland*, daß die *Poyntingsche* Definition die einzige ist, die mit den *Maxwellschen* Gleichungen in Einklang steht. In der Tat enthalten die vorgeschlagenen Alternativen zu  $\vec{S}_P$  in irgendeiner Form neben den Feldstärken die elektrodynamischen Potentiale. Damit sind diese Vorschläge so lange unvollständig, wie nicht eine bestimmte Eichung der Potentiale festgelegt ist ([21], [34]). Es gibt jedoch keinen Hinweis darauf, welche Eichung vorzunehmen wäre. Bei dem von *Lai* vorgeschlagenen Vektor der Energieflußdichte läßt sich durch geeignete Eichung Übereinstimmung mit dem konventionellen *Poynting*-Vektor herstellen. So wirft die Abhängigkeit von der Eichung die Frage auf, ob es überhaupt möglich ist, eine willkürfreie Lokalisierung des Energieflusses im elektromagnetischen Feld vorzunehmen.

Neben der Erhaltung der Energie sollte für jedes abgeschlossene System auch die Erhaltung von Impuls und Drehimpuls gelten. Darauf beruht der Gedankengang von *Furry* [12], der unter Voraussetzung einer  $\vec{Y} = 0$  entsprechenden Forderung bei der Impulsbilanz das Verschwinden von  $\vec{X}$  und  $\vec{Y}$  zeigt, so daß (unter dieser Voraussetzung)  $\vec{S}_P$  der „richtige“ Vektor der Energieströmung ist. Bei der folgenden Skizzierung des Beweises von *Furry* werden Ergänzungen angebracht, die beim Fehlen seiner Voraussetzungen erforderlich sind.

Für den Impuls von Ladungsträgern gilt bei Wechselwirkung mit einem elektromagnetischen Feld

$$\frac{d\vec{P}_{mech}}{dt} = \int (\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}) dV$$

Den Integranden formt man mit den *Maxwell*-Gleichungen um (siehe z.B. [23], S. 238f):

$$\frac{dP_{mech}}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\vec{E} \times \vec{H}}{c^2} dV + \int \frac{\partial \mathbf{t}_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} \vec{e}_\alpha dV \quad (3.23)$$

wobei  $\mathbf{t}_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ ) der *Maxwellsche* Spannungstensor ist. Um von der integralen Bilanz (3.23) zu einer differentiellen zu gelangen, identifiziert man gewöhnlich den ersten Integranden mit der Impulsdichte und den zweiten mit der Divergenz der Impulsstromdichte im Feld. Dabei hat man jedoch die gleichen Probleme, wie sie in Abschnitt 3.4 für die Energiebilanz diskutiert wurden: Weder kann man ringförmig geschlossene Impulsströme ausschließen, noch wird die Impulsbilanz falsch, wenn die Impulsdichte

$$\vec{g} = \frac{\vec{E} \times \vec{H}}{c^2} - \frac{\partial \mathbf{Z}_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} \vec{e}_\alpha \quad (3.24)$$

gesetzt und zugleich die Impulsstromdichte um  $\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t}$  ergänzt wird.

Nach der speziellen Relativitätstheorie bilden Impuls und Energie einen Vierervektor. Dies legt eine Zusammenfassung der Bilanzgleichungen nahe. Man erhält

$$f_i = -\frac{\partial \mathbf{T}_{ik}}{\partial x_k} \quad , \quad (i = 1, 2, 3, 4; x_4 = ict) \quad (3.25)$$

wobei  $f_i = \left( \frac{dg_{mech}}{d\tau}, \frac{i}{c} \frac{du_{mech}}{d\tau} \right)$  die Viererkraftdichte und

$$\mathbf{T}_{ik} = \left( \begin{array}{c|c} \text{Impulsstromdichten} & \text{Impulsdichte} \cdot ic \\ \hline \text{Energiestromdichte} \cdot i/c & \text{Energiedichte} \cdot (-1) \end{array} \right)$$

der Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes ist. Nach den bisherigen Ergebnissen nimmt  $\mathbf{T}$  mit allen Integrationskonstanten die Form

$$\left( \begin{array}{c|c} -\mathbf{t} + \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t} & \left( \frac{\vec{E} \times \vec{H}}{c^2} - \frac{\partial \mathbf{Z}_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} \cdot \vec{e}_\alpha \right) \cdot ic \\ \hline \left( \vec{E} \times \vec{H} + \vec{\nabla} \times \vec{X} + \vec{Y} \right) \frac{i}{c} & -u + \vec{\nabla} \cdot \vec{Y} \end{array} \right) \quad (3.26)$$

an. Nun betrachtet *Furry* die vierdimensionale Verallgemeinerung des Drehimpulses

$$\mathbf{L}_{ijk} = \mathbf{T}_{ij}x_k - \mathbf{T}_{ik}x_j.$$

Hinreichende Bedingung für die Erfüllung des Drehimpulserhaltungssatzes in allen Inertialsystemen,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{L}_{ijk} = 0$$

ist die Symmetrie des Energie-Impuls-Tensors:

$$\mathbf{T}_{ik} = \mathbf{T}_{ki}. \quad (3.27)$$

Dies ergibt eine Verknüpfung zwischen der Impulsdichte und der Energiestromdichte:

$$\vec{S} = c^2 \cdot \vec{g} \quad (3.28)$$

Setzt man, wie *Furry*, die Impulsdichte in der üblichen Form an (und damit  $\mathbf{Z} = 0$ ), dann folgt daraus tatsächlich  $\vec{S} = \vec{S}_P$ . Dies wird in der Literatur als Beweis für die Eindeutigkeit der Energiestromdichte und die Richtigkeit des *Poyntingschen* Ergebnisses gewertet, obwohl die Argumentation nur im Rahmen der Voraussetzung beweiskräftig ist. Allgemeiner führt *Furry's* Argument lediglich zu einer Einschränkung für  $\vec{X}, \vec{Y}$  und  $\mathbf{Z}$ , die keinen Vorschlag für  $\vec{S}$  widerlegt, solange nicht weitere Argumente zu einschränkenden Forderungen an  $\mathbf{Z}$  führen.

Eine Klärung dieser Situation erfordert die Einbeziehung weiterer physikalischer Ideen über die Erhaltungssätze hinaus. Dazu wurde vorgeschlagen, für verschiedene Ansätze die Strahlungsleistung einer beschleunigten Ladung mit dem Ergebnis der *Larmor*-Formel ([25]) zu vergleichen [51]. Eine solche Rechnung führten *Wallace* und *O'Connell* [53] für den *Hines*-Vektor durch. Sie glauben gezeigt zu haben, daß sich mit dem *Hines*-Vektor nur die Hälfte der Strahlungsleistung nach der *Larmor*-Formel ergibt. Tatsächlich jedoch beruht ihr Schluß auf einem Rechenfehler. Beim Übergang von ihrer Formel (12) zu Gleichung (18) haben sie den Summanden

$$\dot{\vec{n}} \cdot \left( \frac{1}{2} \vec{A} \times \dot{\vec{B}} \right) = \frac{1}{2} \frac{e^2}{R^2} \left[ (\vec{n} \cdot \ddot{\vec{\beta}})(\vec{\beta} \cdot \vec{n}) - (\vec{\beta} \cdot \ddot{\vec{\beta}}) \right]$$

vergessen ( $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$ ). Dieser zusätzliche Summand führt dazu, daß die mit dem *Hines*-Vektor berechneten Momentanwerte der Strahlungsleistung von denen der *Larmor*-Formel verschieden sind. Zeitliche Mittelung - bei periodischen Vorgängen über eine Periode, bei nichtperiodischen Vorgängen über den ganzen Beschleunigungsvorgang - führt jedoch nicht nur zur Übereinstimmung beider Ergebnisse, sondern ergibt auch für den *Hines*-Vektor die bekannte Winkelverteilung der Strahlungsleistung. Diese Aussage gilt nicht nur für die von *Wallace* und *O'Connell* gewählte Eichung, sondern für alle physikalisch sinnvollen Eichungen. (Diese Aussage wird in Abschnitt 7.3 am Beispiel des *Hertz*schen Dipols erläutert.)

Wandelt man also die Forderung nach Übereinstimmung mit der *Larmor*-Formel in eine experimentell überprüfbare Aussage ab und fordert, daß alle Vektoren der Energieflußdichte die zeitlich gemittelte Winkelverteilung der Strahlungsleistung richtig wiedergeben müssen, dann ergibt sich daraus zwar eine einschränkende Bedingung für  $\vec{X}$  und  $\vec{Y}$ . Alle hier diskutierten Vektoren erfüllen jedoch diese Bedingungen.

Diese Überlegungen zeigen, daß Alternativen zum *Poynting*-Vektor prinzipiell möglich sind. Damit ist die Frage aufgeworfen, ob für die Annahme lokalisierter Energie im elektromagnetischen Feld vielleicht doch nur pragmatische Gesichtspunkte sprechen ([33], S. 237). Damit würde dann die gleiche Situation bestehen wie beim Gravitationsfeld, in dem Energie und Impuls nicht lokalisierbar sind [7].

### 3.6 Allgemeine Gegenüberstellung der verschiedenen Bilder

1. Nach *Poynting* sind  $\vec{S}$  und  $u$  nur an die Feldstärken, nicht an die Ströme und Ladungen gekoppelt:

- $\vec{S}_P \neq 0 \Leftrightarrow \vec{E} \neq 0 \wedge \vec{H} \neq 0 \wedge \neg(\vec{E} \parallel \vec{H})$   
Elektromagnetische Energie strömt dort, wo sich elektrische und magnetische Feldlinien kreuzen.
- $u_P \neq 0 \Leftrightarrow \vec{E} \neq 0 \vee \vec{H} \neq 0$   
Elektromagnetische Energie wird in elektrischen und in magnetischen Feldern gespeichert.
- Es liegt eine Zerlegung der Energie in einen elektrischen und einen magnetischen Anteil nahe:

$$u = u_e + u_m$$

2. Da die Energiedichten im *Poynting*- und im *Lai*-Bild übereinstimmen, stimmen auch die „Netto-Energieströme“ in ein Raumgebiet überein:

$$u_L = u_P \Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{S}_L = \vec{\nabla} \cdot \vec{S}_P$$

In den beiden anderen Darstellungen stimmt das i.a. nicht.

3. Bei *statischen Feldern* gilt in den meisten Eichungen  $\dot{\Phi} = \dot{\vec{A}} = 0$ . In diesem Fall gilt:

$$\vec{S}_L = \Phi \vec{j} \quad u_L = u_e + u_m \quad (3.29)$$

$$\vec{S}_H = \Phi \vec{j} \quad u_H = u_e + \frac{1}{2} \vec{A} \cdot \vec{j} = u_e + u_j \quad (3.30)$$

$$\vec{S}_n = \Phi \vec{j} \quad u_n = \frac{1}{2} \Phi \rho + \frac{1}{2} \vec{A} \cdot \vec{j} = u_\rho + u_j \quad (3.31)$$

Der Energiefluß ist in allen drei Bildern in gleicher Weise an den Stromfluß gekoppelt. Die Energie wird aber verschieden lokalisiert:

- Bei *Lai* sitzen wie bei *Poynting* elektrische und magnetische Energie in den entsprechenden Feldern.
- Bei *Hines* wird die magnetische Energie auf die Ströme verlagert („potentielle Energie der Ströme“).
- Im neuen Bild wird zusätzlich die elektrische Energie auf den Ladungen lokalisiert („potentielle Energie der Ladungen“). Hier enthält das Vakuum also keine Energie.

Das läßt auch im Falle langsam veränderlicher Felder, bei denen keine Energie zwischen galvanisch getrennten Stromkreisen ausgetauscht wird wie beim Transformator, wesentliche Unterschiede erwarten:

- bei *Lai* Energiefluß aus den Drähten in sich ändernde elektrische und magnetische Felder,
  - bei *Hines* nur in sich ändernde elektrische Felder,
  - im neuen Bild Energiefluß nur in den Leitungen.
4. Bei *Wechselfeldern* sind in allen drei Bildern Energieströme ins Vakuum zu erwarten. Die Nettoströme sind jedoch sehr unterschiedlich, da sie im *Poynting*- und im *Lai*-Bild die sich ändernde Feldenergie versorgen müssen. Im neuen Bild dagegen ist  $u_n$  am Ende der Änderungsphase Null, da das Vakuum nur während der Änderung eine Energiedichte besitzt, also keine Energie im Feld stecken bleibt.
5. Der *quasistationäre Fall* ist dadurch gekennzeichnet, daß  $\dot{\vec{E}}$  als Quelle von  $\vec{B}$  vernachlässigt werden kann:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

In diesem Fall folgt aus  $\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}_0(\vec{r})f(t)$ , wenn also nur *ein* Stromkreis vorliegt oder alle Stromkreise dasselbe Zeitverhalten haben,

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0(\vec{r})f(t).$$

Dann wird man in der Regel  $\vec{A}$  so wählen, daß gilt:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0(\vec{r})f(t) \tag{3.32}$$

Daraus folgt aber:

$$\vec{A} \times \dot{\vec{H}} - \dot{\vec{A}} \times \vec{H} = 0 \tag{3.33}$$

Weiter kann man das elektrische Feld in einen divergenzfreien Teil  $\vec{E}_{rot}$  und einen rotationsfreien Teil  $\vec{E}_{div}$  aufteilen (allerdings nicht eindeutig!),

$$\vec{E} = \vec{E}_{rot} + \vec{E}_{div} = \vec{E}_{ind} + \vec{E}_q = -\dot{\vec{A}} - \vec{\nabla}\Phi,$$

für die die Beziehungen gelten:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_q = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \wedge \quad \vec{\nabla} \times \vec{E}_{ind} = -\dot{\vec{B}} = -\nabla \times \dot{\vec{A}} \quad (3.34)$$

Man kann also  $\Phi$  und  $\vec{A}$  so wählen, daß

$$\vec{E}_q = -\vec{\nabla}\Phi \quad \wedge \quad \vec{E}_{ind} = -\dot{\vec{A}} \quad (3.35)$$

Wegen  $\vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{A}} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{ind} = 0$  ist das praktisch die *Coulomb*-Eichung, die bei niederfrequenten Feldern nahelegt. Mit  $\rho = \rho_0(\vec{r})g(t)$  (d.h. nur *ein* Stromkreis als Quelle von  $\vec{E}$ ) kann man dann wegen  $\nabla^2\Phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$  das Potential  $\Phi$  so wählen, daß gilt

$$\Phi(\vec{r}, t) = \Phi_0(\vec{r})g(t). \quad (3.36)$$

Daraus folgt aber:

$$\begin{aligned} \Phi\ddot{\vec{D}} - \dot{\Phi}\dot{\vec{D}} &= \varepsilon\varepsilon_0 \left( -\Phi\vec{\nabla}\dot{\Phi} - \Phi\ddot{\vec{A}} + \dot{\Phi}\vec{\nabla}\Phi + \dot{\Phi}\dot{\vec{A}} \right) \\ &= \Phi\ddot{\vec{D}}_{ind} - \dot{\Phi}\dot{\vec{D}}_{ind} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Solange also nur ein Stromkreis die Quelle elektrischer und magnetischer Felder darstellt, gilt für *niederfrequente Felder in Coulomb-Eichung*:

$$\vec{S}_P = \vec{E}_q \times \vec{H} + \vec{E}_{ind} \times \vec{H} = \vec{S}_{Pq} + \vec{S}_{Pind} \quad (3.38)$$

$$\vec{S}_L = \vec{S}_{Pind} + \Phi(\vec{j} + \dot{\vec{D}}) \quad (3.39)$$

$$\vec{S}_H = \Phi(\vec{j} + \dot{\vec{D}}) \quad (3.40)$$

$$\vec{S}_n = \Phi\vec{j} + \frac{1}{2} \left( \Phi\dot{\vec{D}}_{ind} - \dot{\Phi}\vec{D}_{ind} \right) \quad (3.41)$$

Energieflüsse durchs Vakuum gibt es dann also

- im *Poynting*-Bild überall, wo sich  $\vec{E}$ - und  $\vec{H}$ -Linien kreuzen, auch bei statischen Feldern,
- im *Lai*- und im *Hines*-Bild dort, wo sich  $\vec{E}$  verändert und
- im neuen Bild nur dort, wo nennenswerte Induktionsfelder auftreten, d.h. in der Nähe von Spulen. Nur dort muß also damit gerechnet werden, daß Energie die Leitungen verläßt.



# Kapitel 4

## Gleichströme und quasistationäre Ströme

In diesem Kapitel und in den nachfolgenden werden die verschiedenen Darstellungen des Energieflusses anhand konkreter Beispiele gegenübergestellt. Dieses Kapitel beschränkt sich dabei auf Gleichströme und Wechselstromkreise, in denen Induktion keine wesentliche Rolle spielt. Es wird dargestellt, wie die elektromagnetische Energie in einen von Gleichstrom durchflossenen Widerstand gelangt, wie in einen Kondensator, der langsam elektrisch aufgeladen wird, und wie in eine Spule, in der die Stromstärke langsam ansteigt.

Da die Aussagen für eine lange Spule (mit Querschnittsfläche  $A$ , Radius  $R$ , Induktivität  $L$  Länge  $l$  und  $n$  Windungen), in der der Strom langsam *mit konstanter Rate* gesteigert wird, nicht ohne weiteres einzusehen sind, sollen für diesen Fall die relevanten Feldstärken vorab berechnet werden: Zu ihrer Berechnung werden vier geschlossene Integrationswege betrachtet (Abb. 4.1):

1. azimuthaler Kreis mit Radius  $r$  innerhalb der Spule:

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = -\dot{B}A \implies 2\pi r E_{\varphi i} = -\frac{\dot{\Phi}}{n} \frac{\pi r^2}{\pi R^2} \implies E_{\varphi i} = -\frac{L\dot{I}}{2\pi n R^2} r \quad (4.1)$$

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = 0 \implies H_{\varphi i} = 0 \quad (4.2)$$

2. azimuthaler Kreis mit Radius  $r$  außerhalb der Spule:

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = -\dot{B}A \implies E_{\varphi a} 2\pi r = -\frac{L\dot{I}}{n} \implies E_{\varphi a} = -\frac{L\dot{I}}{2\pi n r} \quad (4.3)$$

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = -I \implies H_{\varphi a} = -\frac{I}{2\pi r} \quad (4.4)$$

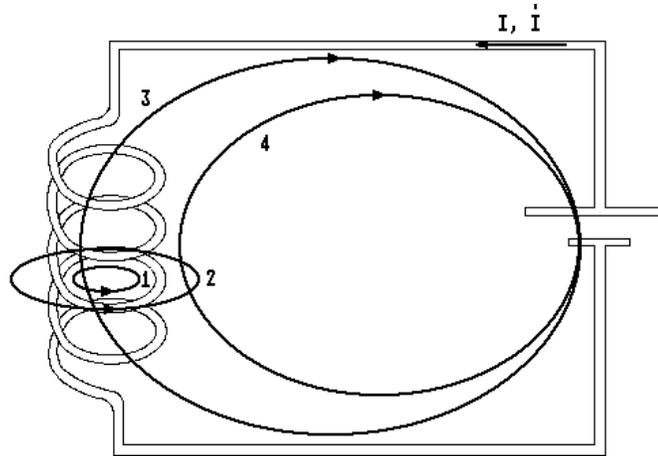


Abbildung 4.1: Integrationswege zur Berechnung der Felder bei einer Spule

3. von der Quelle axial durch die Spule zurück zur Quelle:

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = 0 \implies E_{zi} = -\frac{U}{l} = -\frac{LI}{l} \quad (4.5)$$

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = nI \implies H_{zi} = \frac{n}{l}I \quad (4.6)$$

4. von der Quelle axial an der Spule vorbei zurück zur Quelle:

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = 0 \implies E_{za} = -\frac{LI}{l} \quad (4.7)$$

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = 0 \implies H_{za} = 0 \quad (4.8)$$

#### Folgerungen:

1. Innerhalb und außerhalb der Spule gibt es ein axiales elektrisches Feld, das mit der Spannung an der Spule verknüpft ist.
2. Zusätzlich wird durch Induktion ein azimuthales elektrisches Feld hervorgerufen. Dadurch ist die Neigung der elektrischen Feldlinien so, daß diese auf den Spulenwindungen senkrecht stehen (wie es wegen der angenommenen Widerstandslosigkeit der Drähte sein muß!).
3. Das Magnetfeld ist im Spuleninneren axial, im Spulenäußeren azimuthal gerichtet.

## 4.1 Poynting-Bild

Da in einem widerstandslosen Draht die elektrische Feldstärke verschwindet, kann keine Energie durch den Draht transportiert werden. Die Energie strömt deshalb außen am Leiter entlang. Verantwortlich dafür ist das vom Strom hervorgerufenen Magnetfeld und das elektrische Feld, das durch Oberflächenladungen hervorgerufen wird (siehe z.B. *Hecht* [14]). Das ungefähre Strömungsbild wurde bereits in Abb. 2.1 gezeigt.

Im Innenraum der Spule gilt:

$$\vec{S}_{Pi} = E_{\varphi i} H_{zi} \vec{e}_r \stackrel{(4.1),(4.6)}{=} -\frac{LI\dot{I}}{2\pi R^2 l} r \vec{e}_r \quad (4.9)$$

Im Außenraum gilt:

$$\vec{S}_{Pa} = -E_{za} H_{\varphi a} \vec{e}_r \stackrel{(4.4),(4.7)}{=} -\frac{LI\dot{I}}{2\pi r l} \vec{e}_r \quad (4.10)$$

Der Energiefluß hat im Inneren und Äußeren dieselbe Richtung. Wegen

$$\vec{S}_{Pi}(R) = \vec{S}_{Pa}(R)$$

fließt alle Energie durch die Windungen hindurch in den Innenraum der Spule.

Abb. 4.2 zeigt im Detail den Energiefluß in der Nähe eines stromdurchflossenen Widerstandes, eines Kondensators, der gerade aufgeladen wird, und einer Spule, in der gerade die Stromstärke zunimmt. Beim Kondensator wird die Energie zwischen den Platten im elektrischen Feld, bei der Spule im Inneren im Magnetfeld gespeichert. Da sie nicht durch die Leitungen herangeschafft werden kann, strömt sie durch die Mantelfläche des Kondensators, bzw. durch die Spulenwindungen hindurch. Voraussetzung dafür ist die Existenz von Streufeldern außerhalb von Spule und Kondensator, ohne die der Energiefluß im *Poynting*-Bild nicht verstanden werden kann.

## 4.2 Lai-Bild

Im *Lai*-Bild wird die Energie zwar mit dem elektrischen Strom transportiert, aber wie bei *Poynting* in den Feldern gespeichert. In einem Widerstand versickert also die durch die Kabel ankommende elektromagnetische Energie allmählich (Abb. 4.3a). Bei Kondensator und Spule dagegen muß die Energie aus den Platten bzw. Windungen heraus ins Feld strömen (Abb. 4.3b und c).

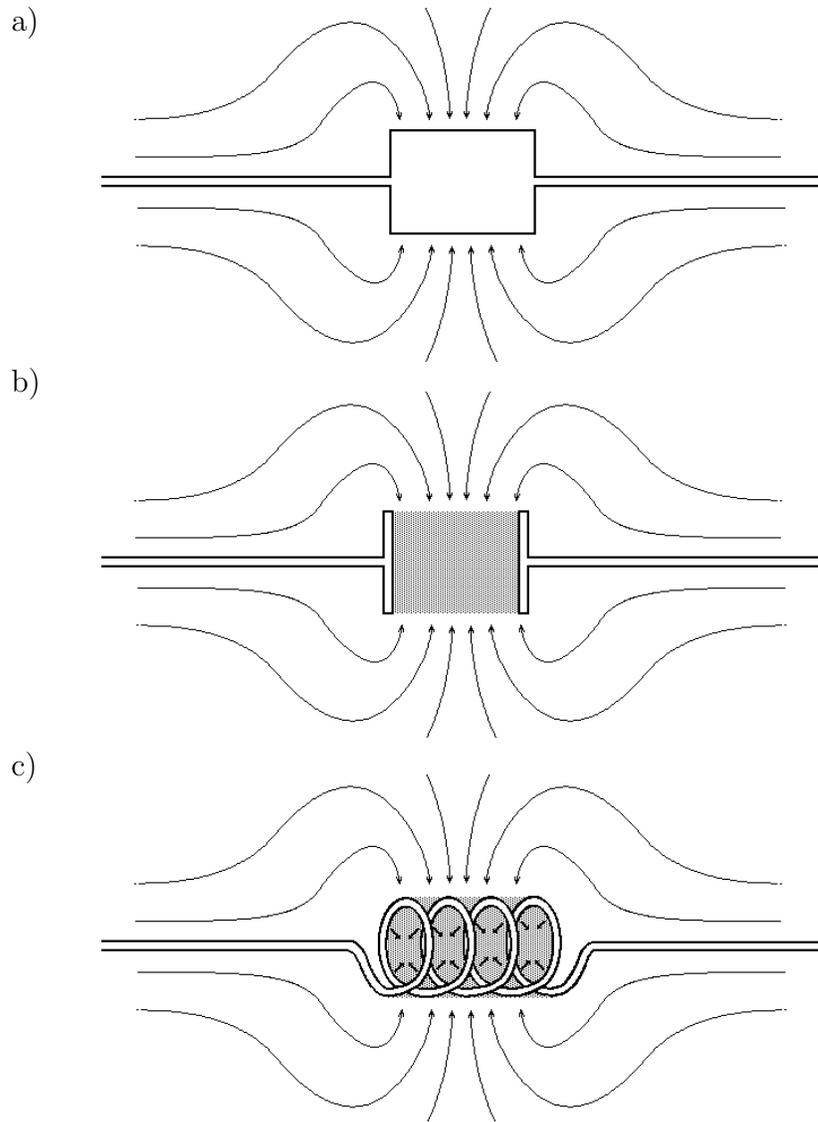


Abbildung 4.2: Energiefluß im *Poynting*-Bild: stromdurchflossener Widerstand, b) Kondensator beim Aufladen, c) Spule bei Stromsteigerung. Die Energiedichte wird durch Punktierung angedeutet. Dabei wird die Energiedichte im Streufeld vernachlässigt.

Beim Kondensator ergibt sich das aus

$$\vec{S}_L = \Phi(\vec{j} + \dot{\vec{D}}).$$

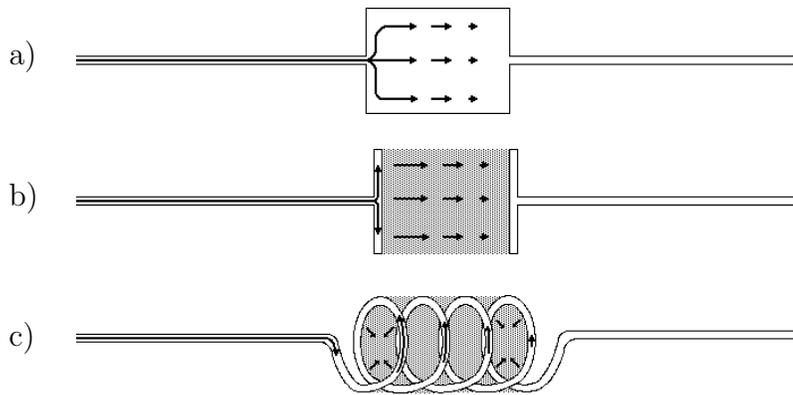


Abbildung 4.3: Energiefluß im *Lai*-Bild: stromdurchflossener Widerstand, b) Kondensator beim Aufladen, c) Spule bei Stromsteigerung

Bei der Spule ist wegen  $\dot{\vec{B}} = \text{const } \dot{\vec{E}} = 0$ . Daraus folgt mit (3.39)

$$\vec{S}_L = \vec{S}_{Pind} + \Phi \vec{j}$$

und damit außerhalb des Drahtes

$$\begin{aligned} \vec{S}_{Li} &= E_{\varphi i} H_{zi} \vec{e}_r = \vec{S}_{Pi} \\ \vec{S}_{La} &= 0 \end{aligned}$$

### 4.3 Hines-Bild

Auch im *Hines*-Bild wird die Energie mit dem Strom transportiert. Wie bei *Poynting* und *Lai* wird die elektrische Energie im elektrischen Feld gespeichert. Der magnetische Anteil der Energie wird dagegen als potentielle Energie der stromdurchflossenen Leiter gespeichert. Der Energiefluß zu Widerstand und Kondensator sieht deshalb wie bei *Lai*. Bei der Spule jedoch bleibt die Energie in den Windungen (Abb. 4.4).

### 4.4 Neues Bild

Im neuen Bild wird die Energie mit dem Strom transportiert und in den Leitern als potentielle Energie von elektrischen Ladungen und elektrischen Strömen gespeichert. Die Energieflußbilder bei Widerstand, Kondensator und Spule sind deshalb extrem einfach (Abb. 4.5).

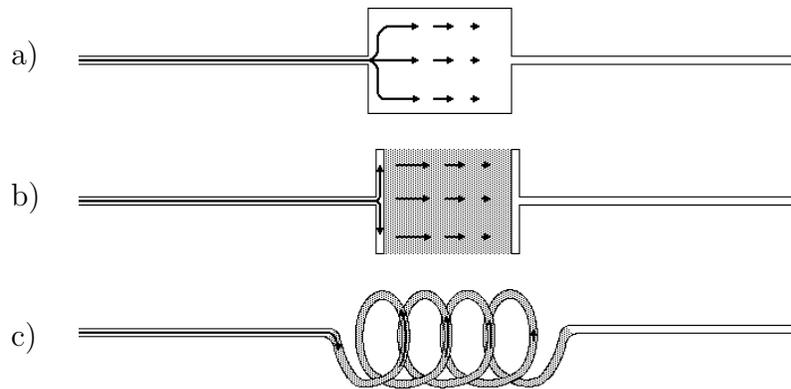


Abbildung 4.4: Energiefluß im *Hines*-Bild: stromdurchflossener Widerstand, b) Kondensator beim Aufladen, c) Spule bei Stromsteigerung

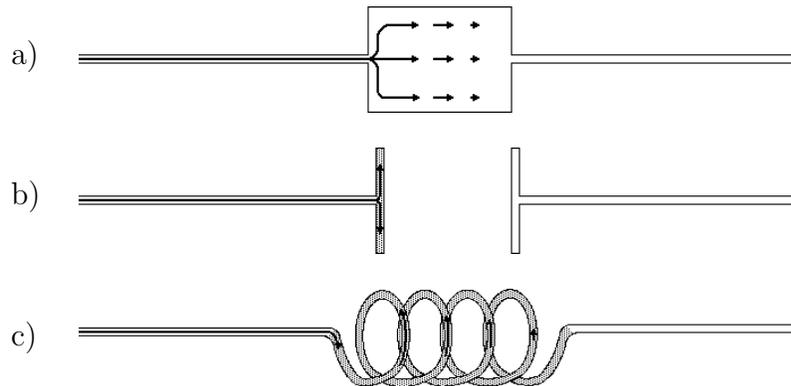


Abbildung 4.5: Energiefluß im neuen Bild: stromdurchflossener Widerstand, b) Kondensator beim Aufladen, c) Spule bei Stromsteigerung

Allerdings sind die Energieflußbilder in den alternativen Darstellungen von der Wahl der Potentiale abhängig. Das wird deutlich anhand verschiedener Festlegungen des Nullpunktes von  $\Phi$  (Abb. 4.6).

Durch diese Abhängigkeit vom skalaren Potential  $\Phi$  ist zwar nicht eindeutig bestimmt, welcher Anteil der Energie durch welches Kabel fließt. Anders als im *Poynting*-Bild (Abb. 4.7) fließt sie jedoch, unabhängig von eventuell in der Nachbarschaft vorhandenen weiteren Stromkreisen, durch die Kabel des Stromkreises.

Allen bisherigen Darstellungen liegt die *Coulomb*-Eichung zugrunde. Wählt man dagegen die elektrodynamischen Potentiale so, daß  $\Phi \equiv 0$  gilt (siehe z.B.

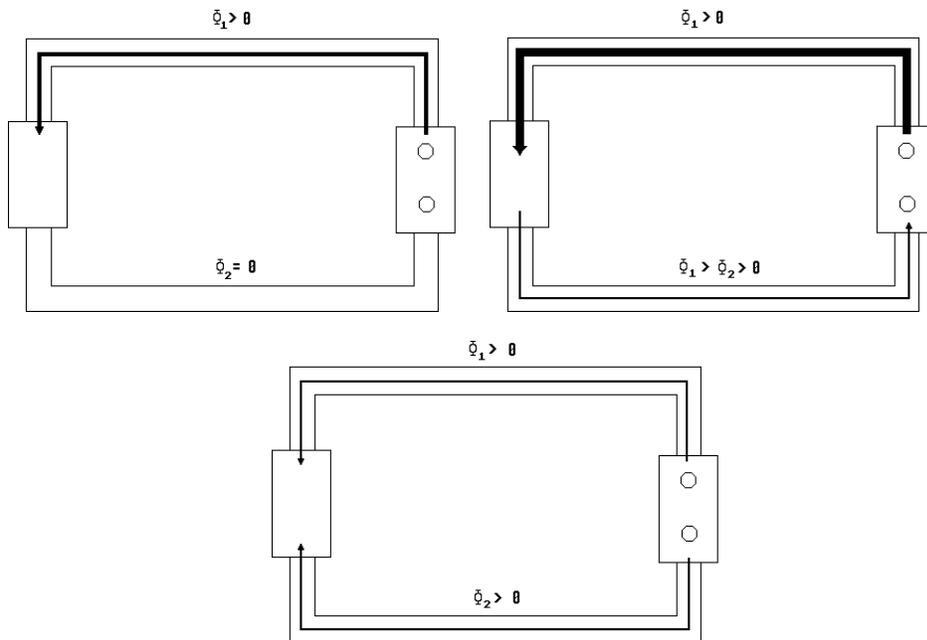


Abbildung 4.6: Energieströmung im Gleichstromkreis in den alternativen Darstellungen bei verschiedener Wahl des Potentialnullpunktes

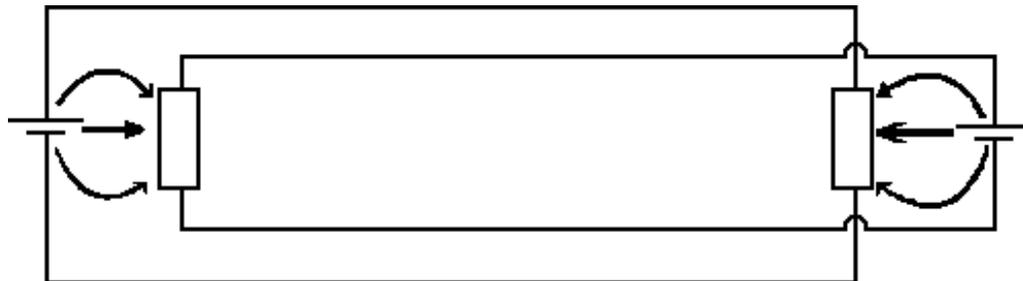


Abbildung 4.7: Energiefluß bei zwei benachbarten Gleichstromkreisen im Poynting-Bild

[35], S.129), ergeben sich andere Aussagen:

- $\vec{S}_L = \vec{S}_P$

Poynting-Bild und Lai-Bild stimmen also überein (das gilt in dieser Eichung allgemein).

- $\vec{S}_H = \vec{S}_n = \frac{1}{2} \left( \vec{A} \times \dot{\vec{H}} - \dot{\vec{A}} \times \vec{H} \right) = \frac{1}{2} \vec{S}_P!$

Zum Widerstand strömt also weniger Energie, als dort frei wird! Das scheint zunächst ein Widerspruch zur Energieerhaltung zu sein. Berücksichtigt man jedoch den Energieinhalt des Widerstandes

$$u_H = u_n = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 - \frac{1}{2}\vec{j} \int_{t_1}^{t_2} \vec{E} dt = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 - \frac{1}{2}\vec{j} \cdot \vec{E}(t_2 - t_1),$$

dann sieht man, daß gleichzeitig der Widerstand immer weniger Energie enthält. Entsprechend wird die nichtelektrische Energie, die dem Generator zugeführt wird, z.T. dort als elektrische Energie gespeichert. Ein sehr merkwürdiges, aber konsistentes Bild!<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Bei *Wechselstrom* ist auch der erste Summand in Gl. (4.4) von Null verschieden. Dann sorgt der Faktor  $\frac{1}{2}$  dafür, daß  $\vec{S}_H$  mit dem zeitlichen Mittelwert von  $\vec{S}_P$  übereinstimmt, „Pendelflüsse“ der Energie also vermieden werden! Die beobachtbare Oszillation der Energieabgabe ist dann eine Folge des schwankenden Energieinhaltes des Widerstandes.

# Kapitel 5

## Transformatoren

### 5.1 Vorbemerkungen

In den letzten Jahren hat es, angeregt durch einen Leserbrief von *Siegman* ([46]), eine ausführliche Diskussion über den Energiefluß in einem Transformator gegeben (siehe z.B. *Lorrain* [28], *Herrmann/Schmid* [17], *Heald* [13], dort weitere Literatur). Der wesentliche Kern aller Ergebnisse wurde bereits von *Lorrain* ([28]) vorweggenommen:

*„In any transformer, the Poynting vector points away from the primary into the field, and away from the field into the secondary. The Poynting vector results from the superposition of the  $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  field associated with the changing magnetic flux and the  $\vec{H}$  fields of the currents in the windings.“*

Diese Antwort ist aber insofern unbefriedigend, als im *Poynting*-Bild sowohl die Spulenwicklungen als auch ein eventuell vorhandener Eisenkern nicht in der Lage sind, Energie zu transportieren. Die Energie, die die Primärspule abgibt, muß ihr also durch das elektromagnetische Feld zugeflossen sein. Dafür sind die Divergenzfelder  $\vec{E}_q$  (s. Gl. (4.7)) verantwortlich, die, gekreuzt mit den magnetischen Feldern (s. Gl. (4.4)), die dadurch hervorgerufen werden, daß die Spulen in Achsrichtung von einem Strom durchflossen werden, für den Zu- bzw. Abtransport der Energie sorgen (siehe Abb. 4.2c). Die meisten Teilnehmer an der Diskussion haben diese Felder jedoch nicht betrachtet.

Die Frage nach dem Energiefluß durch einen Transformator ist auch für diese Arbeit von Interesse, weil im Transformator die Voraussetzungen des letzten Abschnittes nicht mehr erfüllt sind: Es befinden sich zwei Stromkreise in unmittelbarer Nachbarschaft, in denen der elektrische Strom unterschiedlich mit der Zeit variiert. Außerdem wird offensichtlich Energie, die in

den Primärkreis eingespeist wird, im Sekundärkreis frei. Wie wird die Energieübertragung zwischen den beiden Kreisen alternativ beschrieben? Bei der Untersuchung dieser Frage beschränke ich mich im folgenden auf jeweils eine alternative Darstellung, da die anderen lediglich verschiedene Zwischenformen repräsentieren dürften.

## 5.2 Idealer zylindrischer luftgefüllter Transformator

Um die Berechnung der Felder und Potentiale möglichst einfach zu halten, wird zunächst ein luftgefüllter Transformator aus langen Spulen mit folgenden Eigenschaften betrachtet (Abb. 5.1):

- Die Zylindersymmetrie der Spulen wird durch die Zuleitungskabel, die Batterie und den Lastwiderstand im Sekundärkreis nicht gestört.
- Der von den Spulen erzeugte magnetische Fluß durchgreift die jeweils andere Spule vollständig, d.h. die Querschnittsflächen beider Spulen stimmen näherungsweise überein.
- Die Leitungswiderstände der Spulen sind zu vernachlässigen.
- Die Spannung an der Primärspule ist konstant und damit sowohl die Spannung an der Sekundärspule als auch der Sekundärstrom. Diese Annahme ist etwas bequemer als die übliche Untersuchung von Phasenbeziehungen bei Wechselstrom, ändert an den grundsätzlichen Ergebnissen aber wenig: Die Aussagen beschreiben im wesentlichen das *zeitliche Mittel* des Energieflusses bei Wechselstrom.

### 5.2.1 Berechnung der elektrischen und magnetischen Felder

Wegen des vernachlässigbaren Widerstandes des Spulendrahtes gilt

$$\begin{aligned} \frac{U_1}{n_1} - (\dot{B}_1 + \dot{B}_2)A_1 &= \frac{U_1}{n_1} - \frac{L_1}{n_1}\dot{I}_1 - \frac{L_2}{n_2}\frac{A_1}{A_2}\dot{I}_2 = 0 \\ \frac{U_2}{n_2} - \dot{B}_1A_1 - \dot{B}_2A_2 &= -\left(\frac{R_2}{n_2}I_2 + \frac{L_1}{n_1}\dot{I}_1 + \frac{L_2}{n_2}\dot{I}_2\right) = 0 \end{aligned}$$

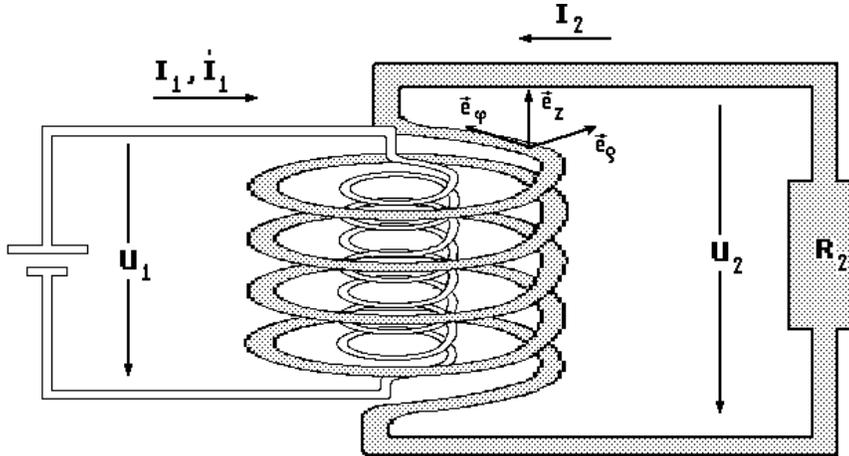


Abbildung 5.1: Der ideale zylindrische Transformator. Der Deutlichkeit wegen ist der Unterschied zwischen den Spulendurchmessern übertrieben dargestellt. Batterie, Widerstand und Zuleitungskabel sollen so weit entfernt sein, daß die Zylindersymmetrie der Anordnung nicht gestört ist.

Dabei sind  $n_i$  die Windungszahlen,  $A_i$  die Windungsflächen,  $L_i$  die Selbstinduktionskoeffizienten und  $B_i$  die durch die Stromstärken  $I_i$  hervorgerufenen Magnetfelder im Innern der beiden Spulen. Damit ergibt sich:

$$R_2 I_2 + L_1 \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right) \dot{I}_2 = -\frac{n_2}{n_1} U_1 \quad (5.1)$$

$$L_1 \dot{I}_1 + \frac{n_2}{n_1} L_1 \dot{I}_2 = U_1 \quad \left(\text{wegen } \frac{L_1}{L_2} = \frac{n_1^2 A_1}{n_2^2 A_2}\right) \quad (5.2)$$

Bei gleichen Windungsflächen ( $A_2 - A_1 \ll A_2 \equiv A$ ) folgt daraus:

$$I_2 = -\frac{n_2 U_1}{n_1 R_2} \quad (5.3)$$

$$L_1 \dot{I}_1 = U_1 + \frac{L_2}{R_2} \dot{U}_1 \quad (5.4)$$

Der elektrische Strom in der Sekundärspule ist also immer in Gegenphase zu  $U_1$ , d.h. der Strom in Abb. 5.1 hat in Primär- und Sekundärkreis denselben Umlaufsinn. Beschränkt man sich weiterhin auf  $U_1 = \text{const}$ , dann vereinfachen sich die Gleichungen zu

$$\boxed{I_1 = \frac{U_1}{L_1} t \quad I_2 = -\frac{n_2}{n_1} \frac{U_1}{R_2}} \quad (5.5)$$

Im Raum zwischen den Spulenwindungen gibt es fünf Felder:

das axiale Magnetfeld im Innern der Sekundärspule

$$l\vec{H}_i(I_2) = -n_2 I_2 \vec{e}_z$$

das dadurch hervorgerufene elektrische Wirbelfeld

$$u\vec{E}_{ind} = \frac{U_1}{n_1} \vec{e}_\varphi = -\frac{R_2}{n_2} I_2 \vec{e}_\varphi$$

das zu  $U_1$  gehörende elektrische Längsfeld

$$l\vec{E}_{q_1} = -U_1 \vec{e}_z$$

das entsprechende Feld der Sekundärspule

$$l\vec{E}_{q_2} = -U_2 \vec{e}_z$$

das zu  $I_1$  gehörende magnetische Wirbelfeld

$$u\vec{H}_{I_1} = I_1 \vec{e}_\varphi \quad (5.6)$$

Dabei sind  $u$  der Umfang der Spule und  $l$  ihre Länge.

Im Außenraum beider Spulen ist neben  $\vec{E}_{q_1}$ ,  $\vec{E}_{q_2}$  und  $\vec{H}_{I_1}$  folgendes Feld zu berücksichtigen:

$$\text{das zu } I_2 \text{ gehörende magnetische Wirbelfeld } u\vec{H}_{I_2} = -I_2 \vec{e}_\varphi \quad (5.7)$$

### 5.2.2 Poynting-Bild

Die Felder (5.6) liefern im Zwischenraum drei Beiträge zum *Poynting*-Vektor:

$$\begin{aligned} ul\vec{S}_{z1} &= ul\vec{E}_{ind} \times \vec{H}_i(I_2) = R_2 I_2^2 \vec{e}_\rho \\ ul\vec{S}_{z2} &= ul\vec{E}_{q_1} \times \vec{H}_{I_1} = -U_1 I_1 \vec{e}_\rho \\ ul\vec{S}_{z3} &= ul\vec{E}_{q_2} \times \vec{H}_{I_1} = R_2 I_2 I_1 \vec{e}_\rho \quad (\sim -\vec{e}_\rho, \text{ weil } I_2 < 0) \end{aligned} \quad (5.8)$$

$S_{z1}$  und  $S_{z2}$  versorgen gerade die zunehmende Energie des magnetischen Feldes im Spuleninneren: Wegen

$$B = \frac{L_1}{n_1 A} I_1 + \frac{L_2}{n_2 A} I_2 = \frac{U_1}{n_1 A} \left( t - \frac{L_2}{R_2} \right)$$

und  $\dot{B} = \frac{U_1}{n_1 A} = \mu_o \frac{n_1 U_1}{l L_1}$

gilt für die Änderung der Feldenergie im Spuleninneren nämlich

$$\dot{P}_{Feld} = \frac{Al}{\mu_0} B \dot{B} = U_1 I_1 - R_2 I_2^2 = -ul(S_{z1} + S_{z2}). \quad (5.9)$$

Der Energiestrom im Raum zwischen den Spulenwicklungen ist also *nach innen*, d.h. zur Primärspule, gerichtet. (Er fließt im Spuleninnenraum durch  $\vec{E}_{ind} \times (\vec{H}_i(I_1) + \vec{H}_i(I_2))$  weiter.)

Der zusätzliche nach innen gerichtete Energiefluß  $\vec{S}_{z3}$  beschreibt den Energiegewinn des elektrischen Stromes in der Primärspule im Feld der Sekundärspule  $\vec{E}_{q2}$ . Da das Feld  $\vec{E}_{q2}$  rotationsfrei ist, gibt der Strom diese Energie in den anderen Teilen des Primärkreises wieder ab!<sup>1</sup>

Im Außenraum beschreiben die Vektoren

$$\vec{S}_{a1} + \vec{S}_{a2} = \vec{E}_{q1} \times \vec{H}_{I1} + \vec{E}_{q2} \times \vec{H}_{I2} = \vec{S}_{z1} + \vec{S}_{z2} \quad (5.10)$$

den Energiefluß in das Feld des Spuleninneren. Die beiden gemischten Terme

$$\vec{S}_{a3} = \vec{E}_{q1} \times \vec{H}_{I2} = -\frac{U_1 I_2}{ul} \vec{e}_\rho \quad (5.11)$$

$$\text{und } \vec{S}_{a4} = \vec{E}_{q2} \times \vec{H}_{I1} = \vec{S}_{z3} \quad (5.12)$$

beschreiben wiederum den Einfluß des elektrischen Feldes der jeweils anderen Spule.

Abb. 5.2 zeigt den Verlauf des Energiestromes in der Umgebung des Transformators im *Poynting*-Bild: Der Hauptenergiestrom von der Batterie zum Lastwiderstand des Sekundärkreises meidet, wie nach den Überlegungen des letzten Kapitels zu erwarten war, den Transformator völlig! In der unmittelbaren Umgebung fließt ein kleiner Energiestrom in Richtung auf die Spulenachse. Dieser Strom trägt dem Umstand Rechnung, daß die Energie im Innern der Primärspule anwächst.

<sup>1</sup>Diese Sprechweise ist nicht ganz konsistent, da im *Poynting*-Bild der Strom keine Energie transportiert. Tatsächlich sorgen Oberflächenladungen für die Kompensation dieses Effektes.

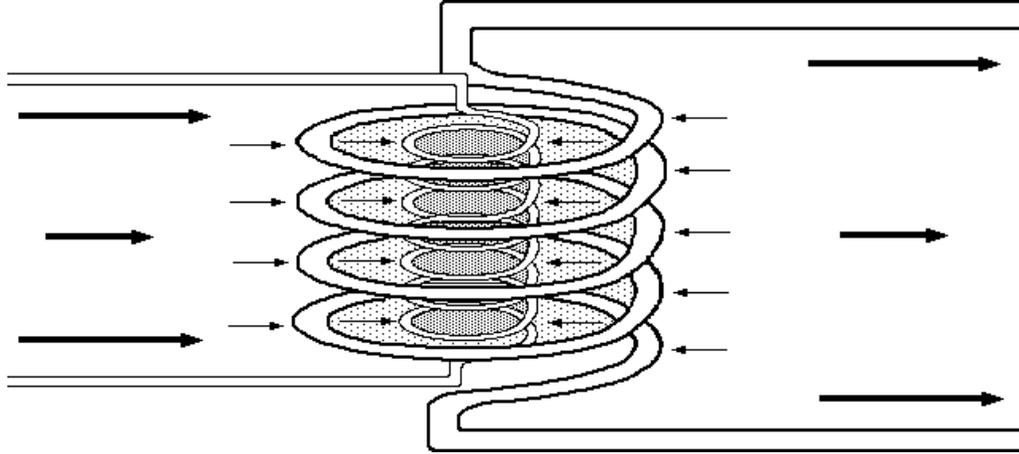


Abbildung 5.2: Energieströmung bei einem zylindrischen Transformator im *Poynting*-Bild

### 5.2.3 Neues Bild

Für den Energiefluß im neuen Bild gilt wegen  $\dot{\Phi} = 0$  und  $\dot{\vec{D}} = 0$  nach (3.22)

$$\vec{S}_n = \frac{1}{2}(\vec{A} \times \dot{\vec{H}} - \dot{\vec{A}} \times \vec{H}) + \Phi \vec{j}. \quad (5.13)$$

Im Spuleninnenraum gehören zu den magnetischen Feldern  $\vec{H}_i(I_1)$  und  $\vec{H}_i(I_2)$  die Vektorpotentiale

$$\vec{A}_{ind} = -\frac{U_1 \rho}{2n_1 A} t \vec{e}_\varphi \quad \text{und} \quad \vec{A}_1 = \frac{U_1 L_2 \rho}{2n_1 R_2 A} \vec{e}_\varphi. \quad (5.14)$$

Wegen der Differenzbildung in (5.13) leisten die  $(\vec{A}, \vec{H})$ -Kombinationen, bei denen  $\vec{A}$  und  $\vec{H}$  dieselbe Zeitabhängigkeit haben, keinen Beitrag zum Energiestrom. Das sind aber alle Kombinationen der Magnetfelder mit den dazugehörigen Vektorpotentialen. Nur die gemischten Terme können also einen Beitrag leisten. Wegen

$$\begin{aligned} \vec{A}_{ind} \times \dot{\vec{H}}_i(I_2) - \dot{\vec{A}}_{ind} \times \vec{H}_i(I_2) + \vec{A}_1 \times \dot{\vec{H}}_i(I_1) - \dot{\vec{A}}_1 \times \vec{H}_i(I_1) &= \\ &= -\dot{\vec{A}}_{ind} \times \vec{H}_i(I_2) + \vec{A}_1 \times \dot{\vec{H}}_i(I_1) = 0 \end{aligned}$$

strömt deshalb im Innenraum keine Energie.

Im Zwischenraum tritt zusätzlich zu  $\vec{A}_{ind}$  und  $\vec{A}_1$  das zu  $\vec{H}_{I_1}$  gehörende Vektorpotential  $\vec{A}_2$  auf:

$$\vec{A}_2 \sim \frac{t}{\rho^2} \vec{e}_z$$

Bei der Berechnung des Energieflusses entfallen die Kombinationen  $(\vec{A}_1, \vec{H}_i(I_2))$  und  $(\vec{A}_2, \vec{H}_{I_1})$  wegen gleicher Zeitabhängigkeit, die Kombinationen  $(\vec{A}_2, \vec{H}_i(I_2))$ ,  $(\vec{A}_1, \vec{H}_{I_1})$  und  $(\vec{A}_{ind}, \vec{H}_{I_1})$  wegen der Parallelität zwischen  $\vec{A}$  und  $\vec{H}$ . Es ergibt sich also

$$\vec{S}_{zn} = \frac{1}{2} \left( \vec{A}_{ind} \times \dot{\vec{H}}_i(I_2) - \dot{\vec{A}}_{ind} \times \vec{H}_i(I_2) \right) = \frac{1}{2} \vec{E}_{ind} \times \vec{H}_i(I_2) \stackrel{(5.8)}{=} \frac{1}{2} \vec{S}_{z1} \quad (5.15)$$

Im Zwischenraum gibt es also einen Energiestrom nach außen, durch den gerade die Hälfte der im Lastwiderstand frei werdenden Energie transportiert wird! Das Bild ist aber widerspruchsfrei, da sich gleichzeitig die potentielle Energie der Sekundärwicklungen ändert. Nach (3.22) gilt nämlich ( $a_d =$  Drahtquerschnitt)

$$P_{I_2} = \frac{1}{2} \dot{\vec{A}}_{ind} \cdot \vec{j}_2 a_d n_2 u = -\frac{1}{2} \vec{E}_{ind} \cdot \vec{j}_2 a_d n_2 u = -\frac{1}{2} R_2^2 I_2^2.$$

Wieder ein etwas merkwürdiges Bild, das man aber als Ausdruck des Umstandes interpretieren kann, daß die Stromstärke in der Primärspule nicht beliebig lange ansteigen kann.<sup>2</sup>

Im Außenraum des Transformators sind zusätzlich zu  $\vec{A}_{ind}$  und  $\vec{A}_2$  die zu  $\vec{H}_{I_2}$  und  $\vec{H}_i(I_2)$  gehörenden Vektorpotentiale zu berücksichtigen:

$$\vec{A}_3 \sim -\vec{e}_z \quad \text{und} \quad \vec{A}_4 \sim \frac{t}{\rho} \vec{e}_\varphi.$$

Die Kombinationen  $(\vec{A}_2, \vec{H}_{I_1})$  und  $(\vec{A}_3, \vec{H}_{I_2})$  entfallen wieder wegen gleicher Zeitabhängigkeit, die Kombinationen von  $\vec{A}_{ind}$  und  $\vec{A}_4$  mit den Magnetfeldern  $\vec{H}_{I_1}$  und  $\vec{H}_{I_2}$  wegen der Parallelität der Felder. Damit ergibt sich aber wieder

$$\begin{aligned} \vec{S}_{an} &= \vec{A}_3 \times \dot{\vec{H}}_i(I_1) - \dot{\vec{A}}_3 \times \vec{H}_i(I_1) + \vec{A}_{ind} \times \dot{\vec{H}}_i(I_2) - \dot{\vec{A}}_{ind} \times \vec{H}_i(I_2) \\ &= \vec{A}_3 \times \dot{\vec{H}}_i(I_1) - \dot{\vec{A}}_{ind} \times \vec{H}_i(I_2) = 0. \end{aligned}$$

Auch im Außenraum verschwindet also die Energiestromdichte.

---

<sup>2</sup>siehe Fußnote 1 auf Seite 40.

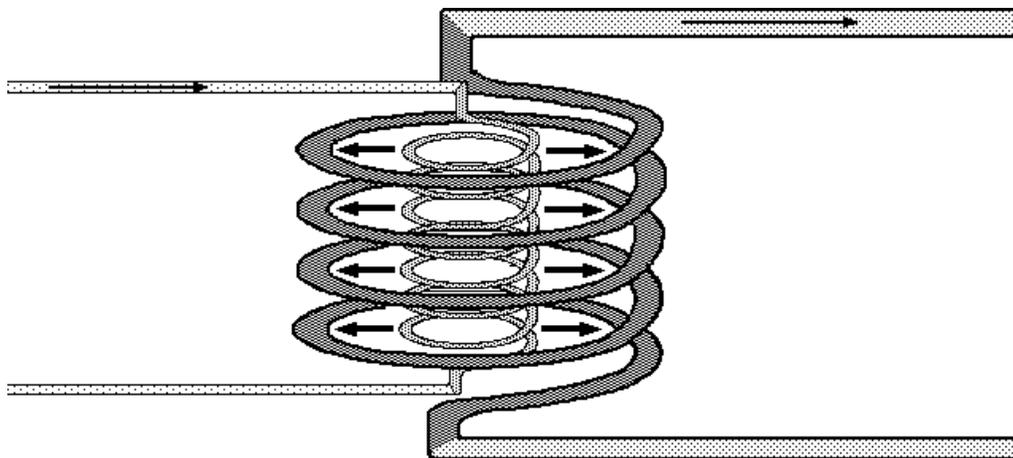


Abbildung 5.3: Energieströmung bei einem zylindrischen Transformator im *neuen* Bild

Abb. 5.3 zeigt den Energiefluß durch den Transformator im neuen Bild: Die Energie strömt mit dem elektrischen Strom auf der Primärseite zum Transformator und auf der Sekundärseite von ihm fort. Der Energieübergang zwischen den beiden Stromkreisen findet zwischen den Spulenwicklungen statt.

In dem Maße, wie die Primärwicklungen Energie abgeben, wird der durch  $\Phi_1 \vec{j}_1$  beschriebene Energiestrom innerhalb des Drahtes geringer. Auf der Sekundärseite nimmt dementsprechend der Energiestrom gemäß  $\Phi_2 \vec{j}_2$  zu. Die gemischten Terme  $\Phi_2 \vec{j}_1$  und  $\Phi_1 \vec{j}_2$  beschreiben die Änderung der potentiellen Energie der Ströme im Potentialfeld des jeweils anderen Stromkreises.<sup>3</sup> Die Energie selbst ist im wesentlichen gemäß  $\vec{A} \cdot \vec{j}$  in den Leitungen lokalisiert. Ihre Dichte ist deshalb in den Spulenwindungen größer als in den Zuleitungen. Solange  $I_2 > I_1$  ist, ist sie im Sekundärkreis größer als im Primärkreis.

### 5.3 Idealer langgestreckter Transformator mit Eisenkern

Ein idealer Transformator ganz anderer Geometrie wird von *Herrmann* und *Schmid* [17] untersucht: ein langgestreckter gerader Transformator, bei dem der Abstand zwischen Primär- und Sekundärwicklung viel größer ist als

<sup>3</sup>siehe Fußnote 1 auf Seite 45.

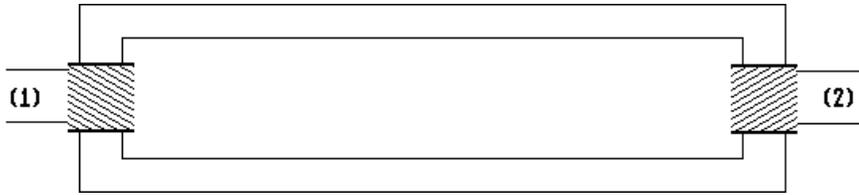
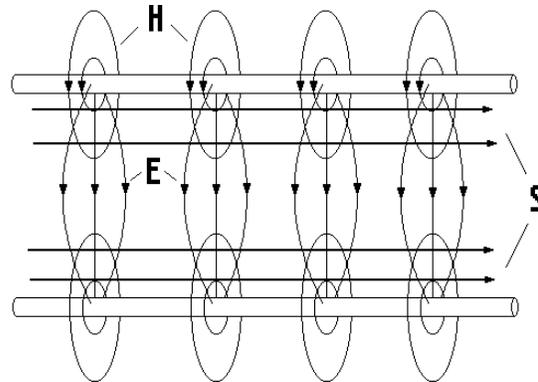


Abbildung 5.4: Langgestreckter Transformator mit Eisenkern

Abbildung 5.5: Energieströmung bei einer Zweidrahtleitung im *Poynting*-Bild

der zwischen den beiden Armen des geschlossenen Kerns aus Weicheisen (Abb. 5.4).

### 5.3.1 Poynting-Bild

*Herrmann* und *Schmid* betonen die Analogie zwischen dieser Anordnung und der einer langgestreckten Zweidrahtleitung: Dort hat das elektrische Feld Quellen ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \neq 0$ ), das magnetische aber nicht ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$ ). Im Falle dieses idealen Transformators aber ist es gerade umgekehrt; das magnetische Feld hat Quellen ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} \neq 0$ ), das elektrische aber nicht ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ ). Die Felder werden geleitet durch den magnetisierten Eisenkern. Aufgrund der entsprechenden Form haben die  $\vec{E}$ - und  $\vec{H}$ -Felder dieselbe Geometrie (bis auf ein Vorzeichen) wie die  $\vec{H}$ - und  $\vec{E}$ -Felder bei der Zweidrahtleitung (Abb. 5.5 und 5.6). Dementsprechend stimmen auch die Energieflußbilder im *Poynting*-Bild völlig überein (Abb. 5.5 und 5.6).

*Herrmann* und *Schmid* machen sich die Analogie zunutze, um die Größen „magnetische Spannung“  $U_m$  und „magnetische Stromstärke“  $I_m$  einzuführen.

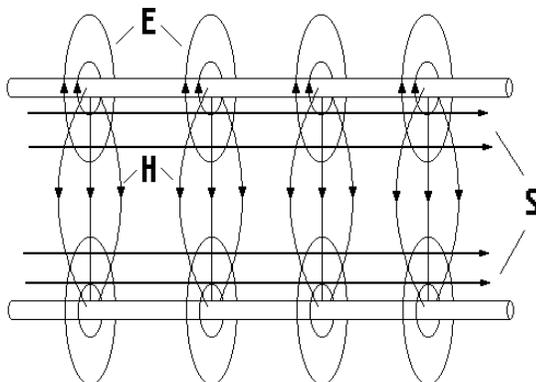


Abbildung 5.6: Energieströmung durch den langgestreckten Transformator im *Poynting*-Bild (nach *Herrmann* und *Schmid* [17])

$$\begin{aligned}
 U_m &= \int \vec{H} \cdot d\vec{r} \\
 I_m &= - \int \vec{B} \cdot d\vec{A}
 \end{aligned}
 \tag{5.16}$$

Mit diesen beiden Größen kann man die Stromstärke der durch den Transformator fließenden Energie schreiben als

$$P = U_m I_m. \tag{5.17}$$

### 5.3.2 Hines-Bild

Insbesondere Gl. (5.17) legt die Vermutung nahe, daß auch in diesem Fall der Energietransport durch andere Wahl der Zusatzfelder (gemäß Gleichung (3.19)) in den Armen des Eisenkernes lokalisiert werden kann. In der Tat kann die Argumentation, die zur Beschreibung des Energietransportes bei Wechselströmen (siehe Kapitel 3.6) führte, völlig analog auf den hier vorliegenden Fall übertragen werden. Die Gegenüberstellung der *Maxwellschen* Gleichungen für die beiden Fälle

Zweidrahtleitung	langgestreckter Transformator
$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M} \equiv \rho_m$
$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$-\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ (wegen $\rho = 0$ )

$$\tag{5.18}$$

$$\tag{5.19}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} \quad -\vec{\nabla} \times \vec{E} = \dot{\vec{B}} \equiv \mu\mu_0\vec{j}_m \quad (5.20)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \dot{\vec{D}} \text{ (wegen } \vec{j} = 0) \quad (5.21)$$

zeigt nämlich folgende Entsprechung

$$\begin{aligned} \vec{D} &\triangleq \frac{\vec{H}}{c} \\ \vec{B} &\triangleq -\frac{\vec{E}}{c} \\ \vec{E} &\triangleq c\vec{B} \\ \vec{H} &\triangleq -c\vec{D} \\ \rho &\triangleq \frac{\rho_m}{c} \\ \vec{j} &\triangleq \frac{\vec{j}_m}{c} \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} &\triangleq -\frac{\vec{E}}{c} = c\vec{\nabla} \times \vec{A}_E \\ \vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \dot{\vec{A}} &\triangleq \vec{B} = -\vec{\nabla}\Phi_m - \dot{\vec{A}}_E \\ \vec{A} &\triangleq c\vec{A}_E \\ \Phi &\triangleq c\Phi_m \end{aligned}$$

Damit haben alle einander entsprechenden Größen dieselbe Dimension. Außerdem behalten die Potentiale ihre energetische Bedeutung: Die Energieänderung beträgt nämlich bei einem magnetischen Monopol (dem Ende einer langen Spule)

$$\Delta W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = P \int \vec{B} \cdot \vec{s} = -P \int \vec{\nabla}\Phi_m \cdot d\vec{s} = -P\Delta\Phi_m$$

und bei einem magnetischen Stromelement

$$\Delta W = \Delta(\vec{A}_E \cdot \vec{j}_m)_{adl}.$$

Dabei ist P die magnetische Polstärke. Magnetische Stromdichte  $\vec{j}_m$  und Ladungsdichte  $\rho_m$  wurden damit, etwas abweichend von *Herrmann* und *Schmid*, so definiert, daß sie als Quotienten aus Polstärke und Zeit und Fläche bzw. aus Polstärke und Volumen interpretiert werden können.

Definiert man jetzt analog zu *Hines*

$$\vec{X} = -c^2\Phi_m\vec{D} \text{ und } \vec{Y} = -\frac{1}{2}c^2(\vec{A}_E \times \vec{D}), \quad (5.22)$$

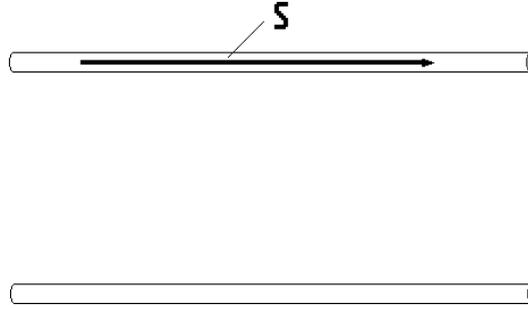


Abbildung 5.7: Energieströmung bei einem langgestreckten Transformator im *Hines*-Bild

dann folgt (nach (3.19))

$$\vec{S}_H = \vec{E} \times \vec{H} + \vec{\nabla} \times \vec{X} + \dot{\vec{Y}} = \frac{1}{2}c^2 \left( \dot{\vec{A}}_E \times \vec{D} - \vec{A}_E \times \dot{\vec{D}} \right) + \Phi_m \vec{j}_m. \quad (5.23)$$

Da unter der von *Herrmann* und *Schmid* genannten Bedingung starker Belastung (entsprechend  $\omega L_2 \gg R_2$  in Gleichung (5.4)) alle Felder dieselbe Zeitabhängigkeit haben, ist also

$$\vec{S}_H = \Phi_m \vec{j}_m. \quad (5.24)$$

Wie bei der Zweidrahtleitung durch den Draht fließt also beim Transformator mit Eisenkern in diesem Bild die Energie durch die Arme des Kernes (Abb. 5.7).

# Kapitel 6

## Zwei-Platten-Wellenleiter

In diesem Kapitel wird der Energietransport durch eine Zwei-Platten-Wellenleitung untersucht. Damit soll gezeigt werden, daß sich auch im Falle schnell veränderlicher Felder aus den alternativen Bildern akzeptable oder sogar einfachere Aussagen über die Details der Energieströmung ergeben.

Betrachtet wird eine unendlich lange Leitung aus parallelen Leiterplatten ohne ohmschen Widerstand, bei der der Abstand zwischen den Platten als so klein angenommen wird ( $b \gg d$ ), daß die Felder parallel zu den Platten als homogen angenommen werden können (Abb. 6.1).

Es wird angenommen, daß sich in den Platten ein beliebig geformtes Signal gemäß

$$f(y - vt)$$

in  $y$ -Richtung ausbreitet. Als Beispiel wird eine harmonische Welle betrachtet:

$$f(y - vt) = f_0 \cos\left(y - \frac{\omega}{k}t\right) =: f_0 \cos \alpha$$

### 6.1 Berechnung der Felder und Potentiale

Wie man leicht nachrechnet, werden die *Maxwell*-Gleichungen im Raum zwischen den Platten exakt gelöst durch

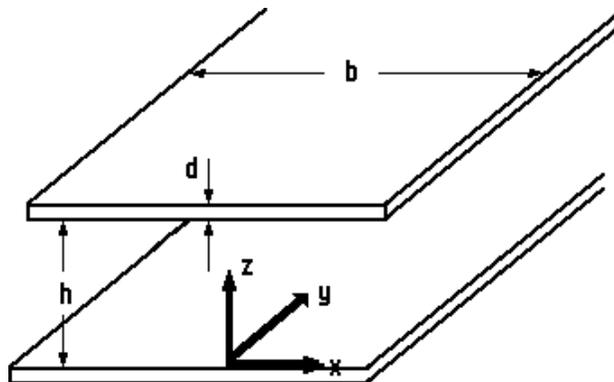


Abbildung 6.1: Wellenleitung aus zwei parallelen ebenen Platten mit geringem Abstand

$$\vec{E}(x, y, z, t) = f \vec{e}_z \quad (6.1)$$

$$\vec{H}(x, y, z, t) = \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} f \vec{e}_x \quad (6.2)$$

$$\vec{j}(x, y, 0, t) = -\vec{j}(x, y, d, t) = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} f \vec{e}_y \quad (6.3)$$

$$\rho(x, y, 0, t) = -\rho(x, y, d, t) = \frac{1}{d} \varepsilon \varepsilon_0 f \quad (6.4)$$

$$\text{mit } v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0}} \quad (6.5)$$

Die folgenden Potentiale erfüllen die Bedingung (3.11) der *Lorentz-Eichung*:

$$\vec{A}(x, y, z, t) = -z \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} f \vec{e}_y \quad (6.6)$$

$$\Phi(x, y, z, t) = -z f \quad (6.7)$$

## 6.2 Energieströmung in Lorentz-Eichung

Aus den in Gln. (6.1) - (6.7) angegebenen Feldstärken und Potentialen lassen sich Energiedichte und Energiestromdichte in den verschiedenen Darstellungen leicht berechnen. Man findet mit den Feldstärken im Zwischenraum:

$$\begin{aligned}\vec{S}_P &= \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} f^2 \vec{e}_y = S_0(1 + \cos 2\alpha) \vec{e}_y \\ u_P &= \varepsilon\varepsilon_0 f^2 = u_0(1 + \cos 2\alpha)\end{aligned}\quad (6.8)$$

$$\begin{aligned}\vec{S}_L &= 2z \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} f f' \vec{e}_z + \Phi \vec{j} = -2zk S_0 \sin 2\alpha \vec{e}_z + \Phi \vec{j} \\ u_L &= u_P\end{aligned}\quad (6.9)$$

$$\begin{aligned}\vec{S}_H &= z \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} f f' \vec{e}_z + \Phi \vec{j} = -zk S_0 \sin 2\alpha \vec{e}_z + \Phi \vec{j} \\ u_H &= \frac{1}{2} \varepsilon\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \vec{A} \cdot \vec{j} = \frac{u_0}{2} (1 + \cos 2\alpha) + \vec{A} \cdot \vec{j}\end{aligned}\quad (6.10)$$

$$\begin{aligned}\vec{S}_n &= \Phi \vec{j} \\ u_n &= \frac{1}{2} (\vec{A} \cdot \vec{j} + \Phi \rho)\end{aligned}\quad (6.11)$$

Dabei ist

$$S_0 := \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} \frac{f_0^2}{2} \quad \text{und} \quad u_0 := \varepsilon\varepsilon_0 \frac{f_0^2}{2}.$$

Die in Kapitel 4 für den Fall quasistationärer Ströme gefundenen Aussagen treffen also weitgehend auch für hochfrequente Wellen in der Zwei-Platten-Leitung zu:

- Im *Poynting*-Bild strömt die Energie zwischen den Platten überall in Ausbreitungsrichtung der Welle. Ihre Stromdichte ist von  $x$  und  $z$  unabhängig. Bei der harmonischen Welle ist einer zeitlich konstanten Energieströmung in Ausbreitungsrichtung eine oszillierende mit doppelter Frequenz und halber Wellenlänge überlagert, die die zeitlich veränderliche Feldenergie versorgt.
- In den anderen Darstellungen wird die Energie wie im stationären Fall mit der Stromdichte  $\Phi \vec{j}$  in den Platten transportiert. Zwischen den Platten tritt nur eine Energieströmung in  $z$ -Richtung auf, also quer zur Ausbreitungsrichtung der Welle. Durch diese Strömung wird dem Feld zwischen den Platten die Energie von der oberen Platte zugeführt - im *Lai*-Bild dem elektrischen und magnetischen Feld, im *Hines*-Bild nur dem elektrischen Feld. Bei der harmonischen Welle verschwindet diese Querströmung im zeitlichen Mittel.

- Im *Hines*-Bild ist die Querströmung halb so groß wie im *Lai*-Bild, weil nur noch der elektrische Anteil der Energie im Feld des Zwischenraumes gespeichert wird.
- In der neuen Darstellung verschwindet die Energie zwischen den Platten völlig. Dementsprechend tritt auch keine Energie aus den Platten in den Zwischenraum. Der Vorgang ist also wie im quasistationären Fall energetisch völlig in den Platten lokalisiert.

Die Energieströmung in dem Wellenleiter bei einer harmonischen Welle ist in Abb. 6.2 für die verschiedenen Bilder dargestellt. Die Energiedichte wird dort durch unterschiedlich dichte Punktierung, die Energiestromdichte durch verschieden dicke und lange Pfeile dargestellt. Bei den alternativen Bildern wurde die Energiedichte und -strömung in der unteren Platte vernachlässigt, obwohl sie dort nicht völlig verschwindet.

### 6.3 Andere Potentiale in Lorentz-Eichung

Auch durch die Bedingung (3.11) der *Lorentz*-Eichung sind die Potentiale noch nicht eindeutig festgelegt. Vielmehr ändern die folgenden Ersetzungen

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda \quad \text{und} \quad \Phi \rightarrow \Phi' = \Phi - \dot{\Lambda}$$

nichts an der *Lorentz*-Eichung, wenn  $\Lambda$  die Bedingung (3.12) erfüllt. Wählen wir

$$\Lambda = h + zg \quad \text{mit} \quad g' = f \quad \text{und} \quad h' = g,$$

dann erfüllt die Funktion  $\Lambda$  die Bedingung (3.12). Mit ihr ergeben sich aus (6.6) und (6.7) die Potentiale im Zwischenraum zu

$$\vec{A}' = \frac{g}{c}(\vec{e}_y + \vec{e}_z) \quad (6.12)$$

$$\Phi' = g \quad (6.13)$$

Mit diesen Potentialen ergeben sich für die Energieströmung zwischen den Platten der Wellenleitung folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \vec{S}_L &= \vec{S}_P - \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}}(f^2 + gf')\vec{e}_z = \vec{S}_P - 2S_0 \cos 2\alpha \vec{e}_z \\ u_L &= u_P \end{aligned} \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned}
\vec{S}_H &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} (f^2 - g f') \vec{e}_y - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} (f^2 + g f') \vec{e}_z \\
&= S_0 \vec{e}_y - S_0 \cos 2\alpha \vec{e}_z \\
u_H &= \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 (f^2 - g f') = u_0
\end{aligned} \tag{6.15}$$

$$\begin{aligned}
\vec{S}_n &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} (f^2 - g f') \vec{e}_y = S_0 \vec{e}_y \\
u_n &= \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 (f^2 - g f') = u_0
\end{aligned} \tag{6.16}$$

Auch in den alternativen Darstellungen wird nun die Energie durch den Zwischenraum transportiert. Man kann also allein durch eine Eichtransformation den Energiefluß von den Platten in den Zwischenraum verlegen und umgekehrt! Im einzelnen ergeben sich folgende Aussagen:

- Die Energieströmung im *Lai*-Bild stimmt weitgehend mit der im *Poynting*-Bild überein. Zusätzlich tritt lediglich eine Energieströmung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung auf, die jedoch zu keiner Änderung der Energiedichte führt, da ihre Divergenz verschwindet.
- Im *Hines*-Bild sind Energieströmung in Ausbreitungsrichtung und Energiedichte zeitlich und räumlich konstant und gleich dem zeitlichen Mittelwert der entsprechenden Größen im *Poynting*-Bild. Wie im *Lai*-Bild tritt zusätzlich eine (nun halb so große) Querströmung auf, die zu keiner Energieänderung führt.
- Das neue Bild stimmt weitgehend mit dem *Hines*-Bild überein. Lediglich die Querströmung der Energie ist verschwunden.

## 6.4 Verallgemeinerungen

Die Überlegungen des vorangegangenen Abschnittes wurden am speziellen Beispiel der Wellenleitung aus parallelen Platten, deren Breite groß gegenüber ihrem Abstand ist, angestellt, weil die Felder dadurch sehr einfach explizit zu berechnen waren. Die Ergebnisse gelten aber wesentlich allgemeiner.

### 6.4.1 Beliebiger Leitungsquerschnitt

Der sich in  $y$ -Richtung erstreckende Wellenleiter kann einen beliebigen Leitungsquerschnitt haben. Von seiner Konfiguration in der Ebene  $y = \text{const}$

braucht lediglich vorausgesetzt zu werden, daß sich dort keine Retardierungseffekte bemerkbar machen. Aus dieser Bedingung folgt, daß Ladungsdichte, Stromdichte, elektrische und magnetische Feldstärke alle dieselbe Zeitabhängigkeit haben und daß die Potentiale ebenso gewählt werden können:

$$\vec{E}, \vec{H}, \vec{A}, \Phi \sim f \quad (6.17)$$

Aus Symmetrieüberlegungen ergibt sich weiter:

$$E_y = H_y = A_x = A_z = 0. \quad (6.18)$$

Elektrisches und magnetisches Feld haben also keine Komponente in Richtung des Wellenleiters, während die Feldlinien des Vektorpotentials parallel dazu verlaufen. Damit wissen wir (ohne Felder und Potentiale explizit berechnen zu müssen!) bereits genug, um die im vorangegangenen Abschnitt für einen Spezialfall gefundenen Eigenschaften des Energieflusses allgemein begründen zu können.

### 6.4.2 Ebene Wellen

Elektromagnetische Wellen, die Gln. (6.17) und (6.18) erfüllen, werden als ebene Wellen bezeichnet, wenn sie nicht durch einen elektrischen Strom geführt werden. Die gewonnenen Ergebnisse gelten also auch für ebene Wellen. Es hat sich damit gezeigt, daß man sich den Energietransport durch ebene Wellen zeitlich und räumlich oszillierend wie im *Poynting*-Bild oder aber zeitlich und räumlich konstant wie im neuen Bild oder im *Hines*-Bild in gewissen Eichungen vorstellen kann.

Im Falle ebener Wellen ist es zunächst überraschend, daß es möglich ist, die Potentiale so zu eichen, daß im neuen Bild Energiedichte und Energiestromdichte ganz verschwinden. Das scheint zunächst ein Widerspruch zu der Erfahrung zu sein, daß mit solchen Wellen Energie übertragen werden kann. Tatsächlich aber sind ebene Wellen eine Idealisierung: Weder elektrisches noch magnetisches Feld haben Quellen; im gesamten Raum gibt es weder geladene Körper, noch stromführende Kabel. Der Raum ist lediglich homogen von der fortlaufenden Welle erfüllt. In einer solchermaßen idealisierten Situation sind nirgends Energieänderungen zu beobachten. Deshalb ist es im neuen Bild möglich, den energetischen Aspekt des „Vorganges“ ganz wegzutransformieren.

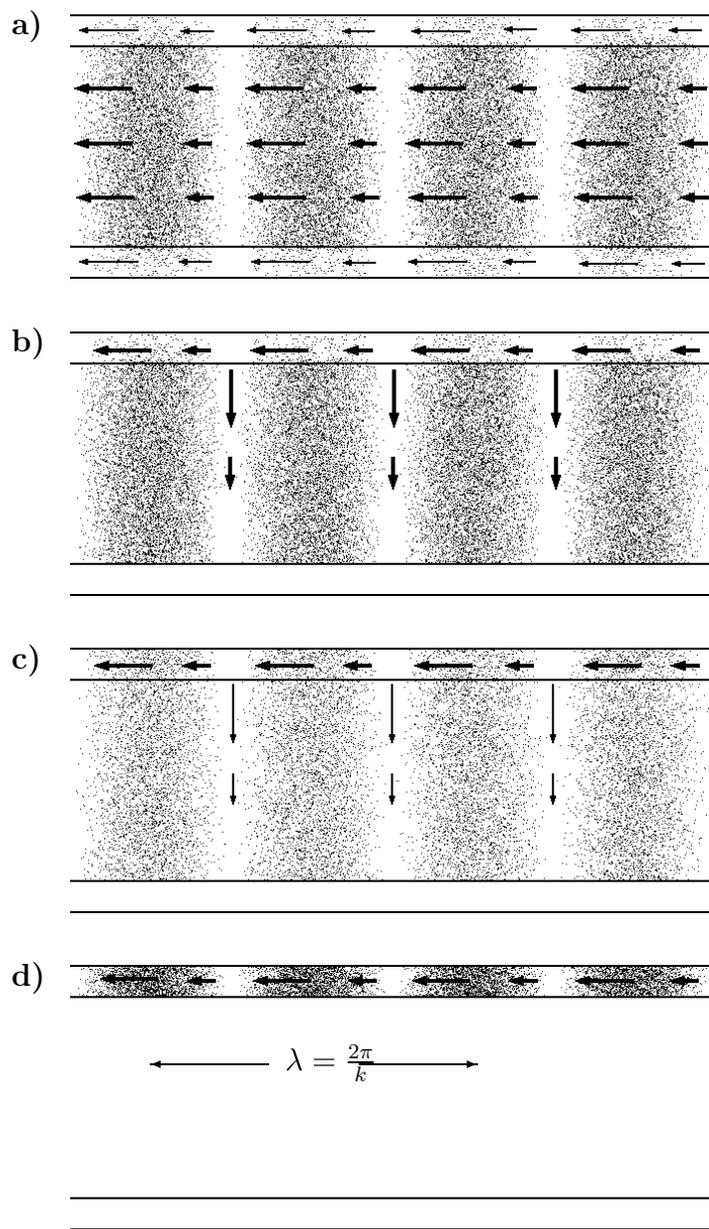


Abbildung 6.2: Energietransport durch einen Wellenleiter bei einer harmonischen Welle im *Poynting*-Bild (a), *Lai*-Bild (b), *Hines*-Bild (c) und im neuen Bild (d)



# Kapitel 7

## Hertzscher Dipol

Die Strahlung einer Antenne ist nach dem Transformator das wohl wichtigste Beispiel, bei dem sich die Energie unzweifelhaft von den Ladungen und Strömen löst und durchs Vakuum fließt. Als ein einfach zu berechnendes Beispiel wird deshalb in diesem Kapitel untersucht, wie die Energieabstrahlung eines *Hertzschen* Dipoles (siehe z.B. *Becker* [4], *Nägerl* [32] und *Schäfer et. al.* [44]) durch die verschiedenen Darstellungen beschrieben wird.

### 7.1 Berechnung der Felder und Potentiale in Lorentz-Eichung

Der *Hertzsche Vektor* (siehe z.B. [48], S. 136) ist definiert durch

$$\vec{\Pi}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{P}_e(\vec{r}', t - \frac{1}{c}|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}'$$

Im Falle des *Hertzschen* Dipols ergibt sich mit

$$\vec{P}_e(\vec{r}, t) = g(t)\delta(\vec{r}) \vec{e}_z$$

$$\vec{\Pi}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{g(t - \frac{r}{c})}{r} \vec{e}_z =: \frac{f(r - ct)}{r} \vec{e}_z. \quad (7.1)$$

Als Spezialfall soll wieder angenommen werden (mit  $[G] = \text{Vm}^2$ ):

$$f(r - ct) = G \cos k(r - ct) =: G \cos \alpha \quad \Longrightarrow \quad \dot{f} = -cf' = cGk \sin \alpha \quad (7.2)$$

Daraus ergibt sich in Kugelkoordinaten:

$$\vec{\Pi} = \frac{f}{r} \cos \theta \vec{e}_r - \frac{f}{r} \sin \theta \vec{e}_\theta \quad (7.3)$$

Mit Hilfe dieses Vektors lassen sich die Potentiale berechnen gemäß:

$$\begin{aligned} \vec{A} = \frac{1}{c^2} \dot{\vec{\Pi}} &= -\frac{f'}{cr} \cos \theta \vec{e}_r + \frac{f'}{cr} \sin \theta \vec{e}_\theta \\ &= -\frac{Gk}{cr} \sin \alpha \cos \theta \vec{e}_r + \frac{Gk}{cr} \sin \alpha \sin \theta \vec{e}_\theta \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$\begin{aligned} \Phi = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} &= \left( \frac{f}{r^2} - \frac{f'}{r} \right) \cos \theta \\ &= G \left( \frac{\cos \alpha}{r^2} + \frac{k \sin \alpha}{r} \right) \cos \theta \end{aligned} \quad (7.5)$$

Diese Potentiale erfüllen die Bedingung (3.11) der *Lorentz-Eichung*. Für die Feldstärken ergibt sich daraus:

$$\begin{aligned} \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{\Pi} &= \left( \frac{f}{r^3} - \frac{f'}{r^2} \right) 2 \cos \theta \vec{e}_r + \left( \frac{f}{r^3} - \frac{f'}{r^2} + \frac{f''}{r} \right) \sin \theta \vec{e}_\theta \\ &= G \left( \frac{\cos \alpha}{r^3} + \frac{k \sin \alpha}{r^2} \right) 2 \cos \theta \vec{e}_r \\ &\quad + G \left( \frac{\cos \alpha}{r^3} + \frac{k \sin \alpha}{r^2} - \frac{k^2 \cos \alpha}{r} \right) \sin \theta \vec{e}_\theta \end{aligned} \quad (7.6)$$

$$\begin{aligned} \vec{H} = \varepsilon_0 \vec{\nabla} \times \dot{\vec{\Pi}} &= \left( \frac{f''}{r} - \frac{f'}{r^2} \right) c \varepsilon_0 \sin \theta \vec{e}_\varphi \\ &= G \left( -\frac{k^2 \cos \alpha}{r} + \frac{k \sin \alpha}{r^2} \right) c \varepsilon_0 \sin \theta \vec{e}_\varphi \end{aligned} \quad (7.7)$$

Abb. 7.1<sup>1</sup> zeigt, berechnet nach einem in [44] beschriebenen Algorithmus, den Verlauf der elektrischen Feldlinien im Nahfeld zur Zeit  $t = \frac{3}{8}T$ . In den Seitenbereichen des Bildes deutet sich an, daß im Fernfeld die Radialkomponente vernachlässigbar wird.

---

<sup>1</sup>Solche Bilder, im Abstand  $\Delta t = T/16$  berechnet und zyklisch miteinander vertauscht, vermitteln an einem Computermonitor filmartig einen Eindruck von der periodischen Ablösung der Feldlinien.

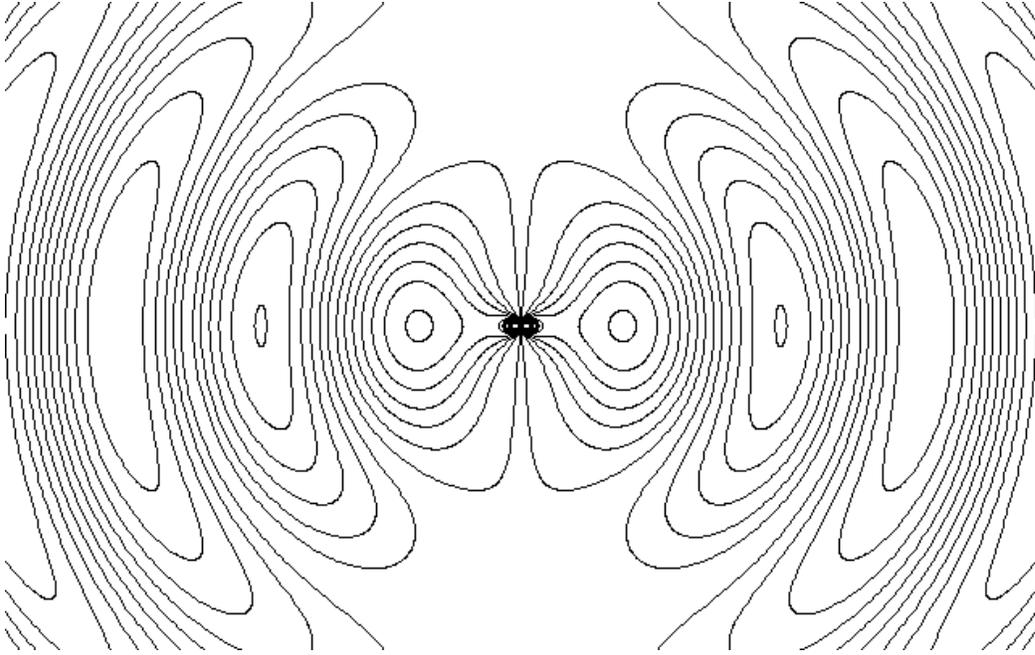


Abbildung 7.1: Elektrisches Feld des Hertzschen Dipols bei  $t = \frac{3}{8}T$

## 7.2 Details der Energieströmung

Mit diesen Potentialen und Feldern können die Energieflußdichtevektoren und die Energiedichten in den verschiedenen Darstellungen berechnet werden. Dabei ergeben sich im Nahfeld im allgemeinen recht schwierig zu übersehende Verhältnisse, bei denen die Energieströmung Komponenten sowohl in radialer Richtung, als auch in meridionaler Richtung hat. Für die Energieabstrahlung sind aber die Felder in großem Abstand verantwortlich. Die folgenden Ausdrücke beschränken sich deshalb auf die *Fernfelder* (gekennzeichnet durch den Index  $F$ ), bei denen nur die Terme mit der höchsten Potenz des Abstandes  $r$  berücksichtigt werden:

$$\begin{aligned}\vec{S}_{PF} &= \frac{c\varepsilon_0}{r^2} \sin^2 \theta f''^2 \vec{e}_r \\ &= \frac{S_0}{r^2} \sin^2 \theta (1 + \cos 2\alpha) \vec{e}_r \quad \text{mit} \quad S_0 := \frac{G^2 k^4 c \varepsilon_0}{2}\end{aligned}\quad (7.8)$$

$$\begin{aligned}u_{PF} &= \frac{\varepsilon_0}{r^2} \sin^2 \theta f''^2 \\ &= \frac{u_0}{r^2} \sin^2 \theta (1 + \cos 2\alpha) \quad \text{mit} \quad u_0 := \frac{G^2 k^4 \varepsilon_0}{2}\end{aligned}\quad (7.9)$$

$$\begin{aligned}\vec{S}_{LF} &= \frac{c\varepsilon_0}{r^2} \sin^2 \theta f''^2 \vec{e}_r + \frac{c\varepsilon_0}{r^2} \sin \theta \cos \theta (f''^2 + f' f''') \vec{e}_\theta \\ &= \vec{S}_{PF} + \frac{S_0}{r^2} \sin 2\theta \cos 2\alpha \vec{e}_\theta\end{aligned}\quad (7.10)$$

$$u_{LF} = u_{PF} \quad (7.11)$$

$$\begin{aligned}\vec{S}_{HF} &= \frac{c\varepsilon_0}{2r^2} \sin^2 \theta (f''^2 - f' f''') \vec{e}_r + \frac{c\varepsilon_0}{2r^2} \sin \theta \cos \theta (f''^2 + f' f''') \vec{e}_\theta \\ &= \frac{S_0}{r^2} \sin^2 \theta \vec{e}_r + \frac{S_0}{2r^2} \sin 2\theta \cos 2\alpha \vec{e}_\theta\end{aligned}\quad (7.12)$$

$$\begin{aligned}u_{HF} &= \frac{\varepsilon_0}{2r^2} \sin^2 \theta (f''^2 - f' f''') \\ &= \frac{u_0}{r^2} \sin^2 \theta\end{aligned}\quad (7.13)$$

$$\begin{aligned}\vec{S}_{nF} &= \frac{c\varepsilon_0}{2r^2} \sin^2 \theta (f''^2 - f' f''') \vec{e}_r \\ &= \frac{S_0}{r^2} \sin^2 \theta \vec{e}_r\end{aligned}\quad (7.14)$$

$$\begin{aligned}u_{nF} &= \frac{\varepsilon_0}{2r^2} \sin^2 \theta (f''^2 - f' f''') \\ &= u_{HF}\end{aligned}\quad (7.15)$$

#### Diskussion:

- Im *Poynting*-Bild ist der Energiestrom radial gerichtet. Im Falle des harmonischen Dipols schwankt er harmonisch um einen Mittelwert. Die Energiedichte hat dieselbe Winkel- und Zeitabhängigkeit wie die Energiestromdichte. So einfach sind die Verhältnisse jedoch nur im Fernfeld: Im Nahfeld überlagert sich der radialen eine meridonale Energieströmung, die zu einem komplizierten Strömungsmuster führt (Abb. 7.2<sup>2</sup>).
- Die radiale Energieströmung im *Lai*-Bild stimmt mit der des *Poynting*-Bildes überein. Hinzu kommt jedoch eine meridonale Energieströmung, die auch im Fernfeld von derselben Größenordnung ist wie die Radialströmung. Dadurch ist das Strömungsbild im Fernfeld ebenso kompliziert wie im Nahfeld (Abb. 7.3<sup>3</sup>). Da die Ausdrücke für die Energiedichte aber in beiden Bildern übereinstimmen, kann die meridonale Energieströmung nicht zu einer lokalen Änderung der Energiedichte führen. Tatsächlich verschwindet ihre Divergenz. Im Falle der harmonischen Felder verschwindet diese Strömung im zeitlichen Mittel.

---

<sup>2</sup>siehe Fußnote 1

<sup>3</sup>siehe Fußnote 1

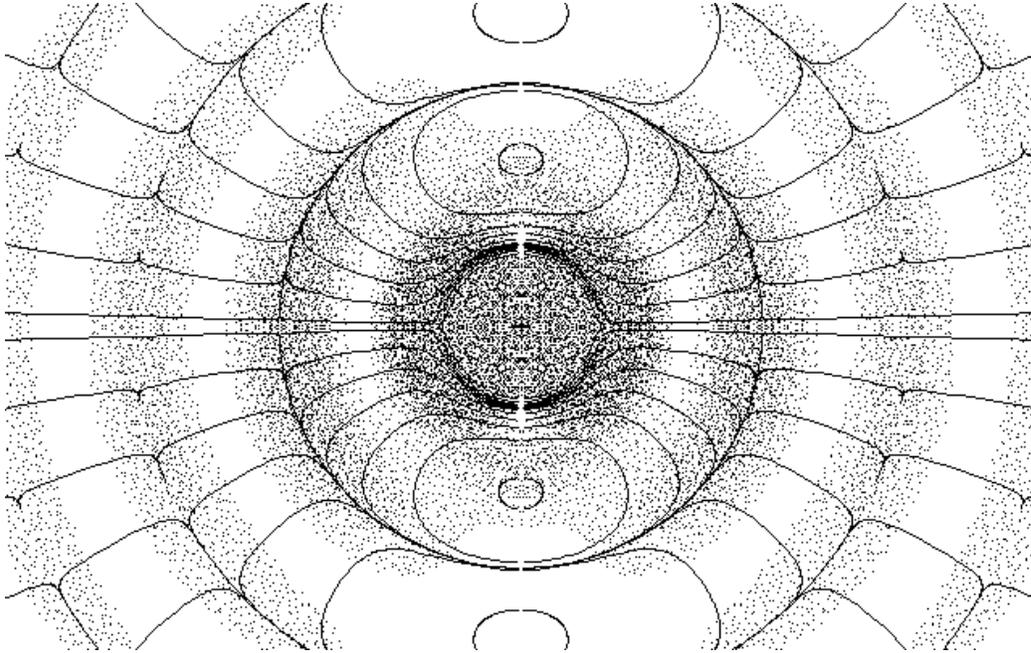


Abbildung 7.2: Energieabstrahlung des Hertzschen Dipols im Poynting-Bild bei  $t = \frac{3}{8}T$ . Die Energiedichte wird durch unterschiedliche Punktierung veranschaulicht.

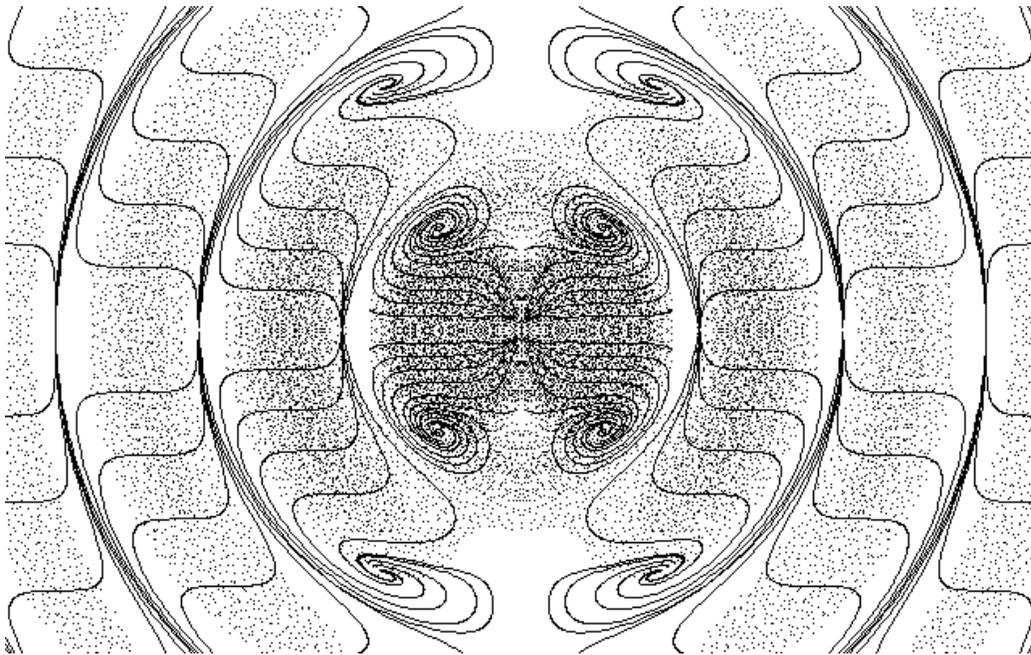


Abbildung 7.3: Energieabstrahlung des Hertzschen Dipols im Lai-Bild bei  $t = \frac{3}{8}T$

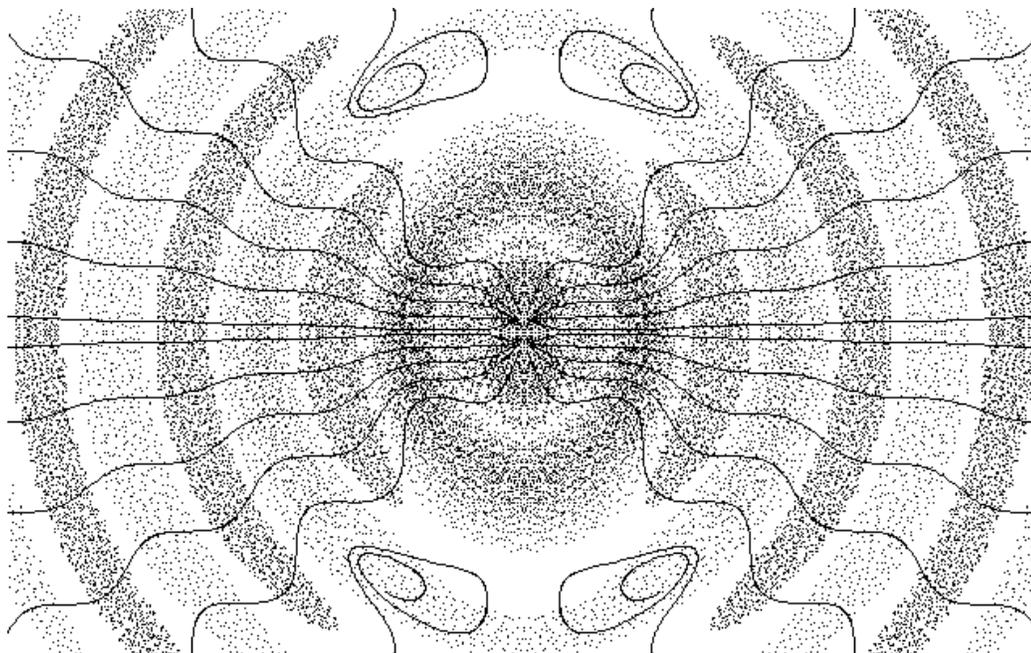


Abbildung 7.4: Energieabstrahlung des Hertzschen Dipols im Hines-Bild bei  $t = \frac{3}{8}T$

- Im *Hines*-Bild hat die Energieströmung, ebenso wie im *Lai*-Bild, eine (halb so große) nicht verschwindende Meridonalkomponente. Die Radialkomponente unterscheidet sich von der des *Lai*-Bildes: Beim harmonisch schwingenden Dipol ist sie zeitlich konstant, und zwar gleich dem zeitlichen Mittelwert der Radialströmung im *Poynting*-Bild! Deshalb stimmen natürlich auch die Ausdrücke für die Energiedichten nicht überein: Im *Hines*-Bild ergibt sich beim harmonischen Dipol (im Fernfeld) überall eine zeitlich konstante Energiedichte. So muß es auch sein: Die Meridonalkomponente führt ja, ebenso wie im *Lai*-Bild, zu keiner Energieänderung. Im Nahfeld ist das Strömungsbild ähnlich kompliziert wie in den anderen Bildern (Abb. 7.4<sup>4</sup>).
- Die meridonale Energieströmung des *Lai*- und des *Hines*-Bildes kann durch Umeichung der Potentiale eliminiert werden: Wählt man nämlich

$$\Lambda = \frac{f}{cr} \cos \theta,$$

dann erfüllt diese Funktion im Fernfeld die Bedingung (3.12), ändert

---

<sup>4</sup>siehe Fußnote 1

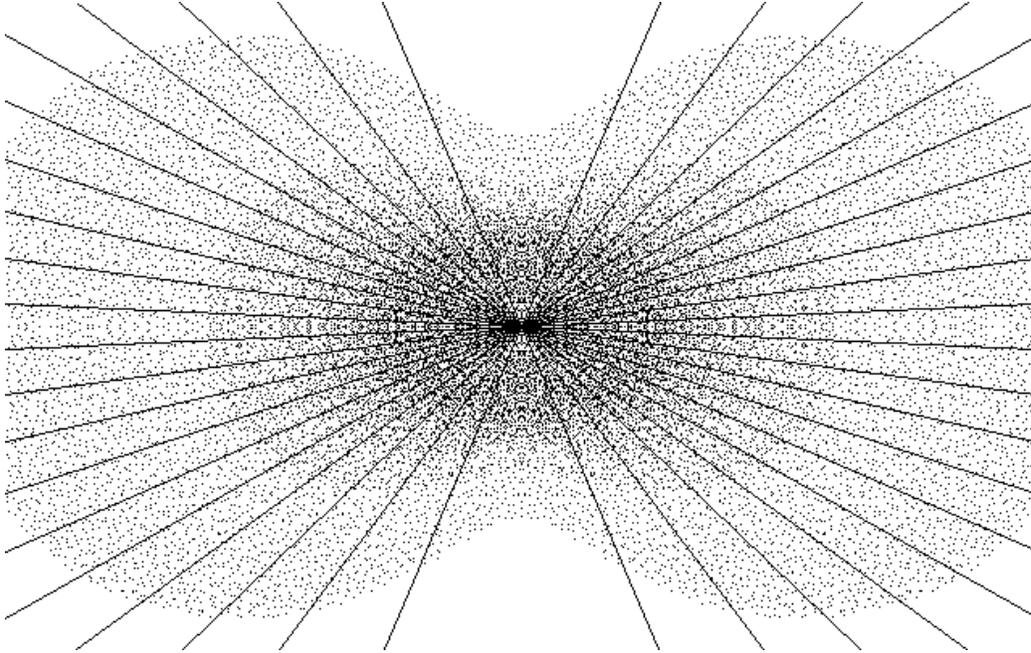


Abbildung 7.5: Energieabstrahlung des Hertzschen Dipols im neuen Bild. Dichte und Stromdichte der Energie sind zeitlich konstant.

also nichts an der *Lorentz*-Eichung der Potentiale. Eichet man die Potentiale mit dieser Funktion gemäß (3.9) um, dann kann die Meridionalströmung auch in diesen beiden Darstellungen im Fernfeld vernachlässigt werden.

- Im neuen Bild tritt, ebenso wie im *Poynting*-Bild, keine meridonale Energieströmung auf. Die Radialkomponente stimmt mit der des *Hines*-Bildes überein, ist also im harmonischen Fall zeitlich konstant. Entsprechendes gilt für die Energiedichte. Im Gegensatz zu den anderen Bildern gelten diese Aussagen, wie man leicht nachrechnet, auch im Nahfeld: *Im neuen Bild strömt die Energie beim harmonischen Dipol auch im Nahfeld nur in radialer Richtung. Energiedichte und Energiestromdichte sind in diesem Fall auch im Nahfeld zeitlich konstant (Abb. 7.5<sup>5</sup>)!*

Es treten also wesentliche Unterschiede in den Aussagen über die Details der Energieströmung beim *Hertz*schen Dipol in den verschiedenen Darstellungen auf. Damit erhebt sich die Frage, ob experimentell eine Entscheidung

---

<sup>5</sup>siehe Fußnote 1

zugunsten eines Bildes getroffen werden kann. Sicher ist bei einem schwingenden Dipol die Energieabstrahlung, d.h. die insgesamt von ihm abgestrahlte Leistung meßbar. Darüberhinaus ist auch die Winkelverteilung der Strahlung beobachtbar. Machen die verschiedenen Darstellungen darüber unterschiedliche Aussagen?

### 7.3 Energieabstrahlung

Die Winkelverteilung der abgestrahlten Leistung ergibt sich aus

$$\frac{dP}{d\Omega} = r^2 \vec{S}_F \cdot \vec{e}_r \quad (7.16)$$

Daraus folgt für die gesamte Strahlungsleistung

$$P = \int \frac{dP}{d\Omega} d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{dP}{d\Omega} \sin\theta d\theta d\varphi. \quad (7.17)$$

Im *Poynting*-Bild ergibt sich daraus beim harmonisch schwingenden Dipol

$$\frac{dP_P}{d\Omega} = S_0 \sin^2\theta (1 - \cos^2\alpha) \quad \text{und} \quad P_P = \frac{8\pi}{3} S_0 (1 + \cos 2\alpha). \quad (7.18)$$

Da es für die Energieabstrahlung nur die Radialkomponente von  $\vec{S}$  ankommt, ergeben sich im *Lai*-Bild dieselben Aussagen. Im *Hines*-Bild und im neuen Bild gilt das nicht. Dort sind die Energieabstrahlung und ihre Winkelverteilung nämlich zeitlich konstant:

$$\frac{dP_{H,n}}{d\Omega} = S_0 \sin^2\theta \quad \text{und} \quad P_{H,n} = \frac{8\pi}{3} S_0 \quad (7.19)$$

Diese Ausdrücke stimmen jedoch mit dem *zeitlichen Mittel* der *Poyntingschen* Ergebnisse überein!

$$\overline{\frac{dP_P}{d\Omega}} = \overline{\frac{dP_L}{d\Omega}} = \frac{dP_{H,n}}{d\Omega} \quad (7.20)$$

Dieses wichtige Ergebnis kann in dreierlei Hinsicht verallgemeinert werden:

1. Im zeitlichen Mittel ergibt sich Übereinstimmung zwischen den verschiedenen Bildern nicht nur beim harmonischen Dipol. Vielmehr gilt es auch, wenn

- bei beliebiger periodischer Zeitabhängigkeit der Funktion  $f$  über eine Periode oder
- bei einem nicht periodischen Vorgang über den gesamten Beschleunigungszeitraum

integriert wird:

- Die Radialkomponenten von  $\vec{S}_H$  und  $\vec{S}_n$  unterscheiden sich von der des *Poynting*-Vektors nur durch einen Term der Form

$$f''^2 - \frac{1}{2}f''^2 + \frac{1}{2}ff''' = \frac{1}{2}(f''^2 + ff''') = \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t}(ff'')$$

Dieser Term verschwindet aber, wenn zeitlich gemittelt wird – bei einem beliebigen periodischen Vorgang über eine Periode, bei einem kurzen nichtperiodischen Vorgang über den gesamten Zeitraum, so daß  $ff''$  zu Beginn und am Ende verschwindet.

- Die Meridonalkomponenten von  $\vec{S}_L$  und  $\vec{S}_H$  werden bestimmt durch denselben Term. Auch sie verschwinden deshalb immer im zeitlichen Mittel.
- Im Nahfeld des Dipols gilt für die Meridonalkomponente von  $\vec{S}_n$ :

$$S_{n\theta} = \frac{c\varepsilon_0}{r^3} \sin\theta \cos\theta (ff'' - ff''') = \frac{S_0}{cr^3} \sin\theta \cos\theta \frac{\partial}{\partial t}(ff'' - f'^2)$$

Auch dieser Ausdruck verschwindet also im zeitlichen Mittel.

2. Das Ergebnis ist eichinvariant in folgendem Sinne: Werden gemäß (3.9) die Potentiale durch Zusatzpotentiale

$$\vec{A}_z = \vec{\nabla}\Lambda \quad \text{und} \quad \Phi_z = -\dot{\Lambda}$$

ergänzt, dann führt das in den verschiedenen Bildern zu folgenden zusätzlichen Energieströmen:

$$\begin{aligned}\vec{S}_{Lz} &= -\vec{\nabla}\dot{\Lambda} \times \vec{H} - \dot{\Lambda}\dot{\vec{D}} \\ &= -\vec{\nabla} \times (\dot{\Lambda}\vec{H})\end{aligned}\quad (7.21)$$

$$\begin{aligned}\vec{S}_{Hz} &= \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\Lambda \times \dot{\vec{H}} - \vec{\nabla}\dot{\Lambda} \times \vec{H}) - \dot{\Lambda}\dot{\vec{D}} \\ &= -\vec{\nabla} \times (\dot{\Lambda}\vec{H}) + \frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\Lambda \times \vec{H})\end{aligned}\quad (7.22)$$

$$\begin{aligned}\vec{S}_{nz} &= \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\Lambda \times \dot{\vec{H}} - \vec{\nabla}\dot{\Lambda} \times \vec{H} - \dot{\Lambda}\dot{\vec{D}} + \ddot{\Lambda}\vec{D}) \\ &= -\vec{\nabla} \times (\dot{\Lambda}\vec{H}) + \frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\Lambda \times \vec{H} + \dot{\Lambda}\vec{D})\end{aligned}\quad (7.23)$$

Im zeitlichen Mittel wird die Energieströmung durch die Umeichung also nur um eine Rotationsströmung ergänzt. Da diese Strömung divergenzfrei ist, kann sich dadurch an der gesamten Strahlungsleistung des Dipols nichts ändern.

Allerdings kann im allgemeinen durch eine solche Strömung die Winkelverteilung der Energieabstrahlung verändert werden:

$$\begin{aligned}r^2\vec{S}\vec{e}_r &= -r^2[\vec{\nabla} \times (\Lambda\dot{\vec{H}})]_r = -r^2(\vec{\nabla} \times [\Lambda\dot{H}_\varphi\vec{e}_\varphi])_r \\ &= -\frac{r}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\Lambda\dot{H}_\varphi)\end{aligned}$$

Da aber  $H_\varphi$  proportional zu  $\frac{1}{r}$  abfällt, verschwindet dieser Term in großem Abstand, wenn nur  $\Lambda$  für großes  $r$  verschwindet. *An der Winkelverteilung der Energieabstrahlung ändert sich durch die Umeichung nichts, wenn nur die folgende Bedingung erfüllt ist:*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Lambda = 0$$

3. Mit Hilfe der *Liènard-Wiechert-Potentiale* (siehe z.B. [23], S. Kapitel 14) kommt man zu entsprechenden Ergebnissen für die Energieabstrahlung beliebig beschleunigter geladener Teilchen.

# Kapitel 8

## Zusammenfassung und Diskussion

In elektrischen Anlagen wechselwirken Quelle und Verbraucher, Sender und Empfänger miteinander: Im Verbraucher auftretende Erwärmungen, Bewegungen usw. gehen einher mit entsprechenden Vorgängen in der Quelle: Ein Kondensator entlädt sich, eine Batterie wird verbraucht, jemand strengt sich beim Drehen eines Generatorankers an. Die beiden Vorgänge bedingen sich gegenseitig: Ohne Anstrengung am Generator keine Erwärmung - aber ohne Erwärmung auch keine Anstrengung! Diese Erfahrungen werden mit der Energie auf den physikalischen Begriff gebracht: In der Quelle wird elektrische Energie erzeugt, im angeschlossenen Gerät wird diese Energie wieder verbraucht. Bereits diese Ausdrucksweise impliziert die Vorstellung der lokalen Energieerhaltung, eines Energieflusses also: Bevor die in der Quelle erzeugte Energie im Verbraucher benutzt werden kann, muß sie die räumliche Distanz zwischen beiden überwunden haben. Damit erhebt sich die Frage nach den Mechanismen dieses Transportvorganges, d.h. insbesondere die Frage nach den Stromwegen und der Strömungsgeschwindigkeit.

Die Kontinuitätsgleichung (3.15) für die elektromagnetische Energie, Ausdruck der lokalen Energieerhaltung, gibt auf diese Fragen nur unvollkommene Antwort: Die aus ihr folgenden Ausdrücke für Energiedichte  $u$  und Energieflußdichte  $\vec{S}$  sind nur bis auf gewisse, weitgehend willkürliche Zusatzfelder bestimmt (s. Gl. (3.19)). Deshalb stellen die *Maxwell-Poyntingschen* Ausdrücke für  $u$  und  $\vec{S}$  nur eine von im Prinzip beliebig vielen Darstellungen dar. In dieser Arbeit wurden drei weitere Möglichkeiten diskutiert: die *Hines-Darstellung* (3.20), die *Lai-Darstellung* (3.21) und eine bisher in der Literatur noch nicht erwähnte neue Darstellung (3.22).

Da alle diese Darstellungen mit der Kontinuitätsgleichung für die Energie verträglich sind, können sie sicher nicht in Widerspruch zu der Forderung

nach Energieerhaltung geraten. Will man eindeutige Aussagen über Dichte und Stromdichte der Energie erreichen, müssen also zusätzliche Argumente herangezogen werden:

*„Man hat vermutet, daß die einfachste Möglichkeit die richtige ist, aber wir müssen zugeben, daß wir nicht sicher wissen, welche die wirkliche Lokalisierung der elektromagnetischen Feldenergie im Raum beschreibt.“* ([11], S. 27-8)

(Weiter unten wird begründet, daß selbst die Forderung nach „Einfachheit“ verschiedene Interpretationen zuläßt!) Die Diskussion in Kapitel 3.5 hat gezeigt, daß die bisher vorgebrachten Argumente nicht stichhaltig sind. So hat bereits *Birkeland* [5] gezeigt, daß *Feynman*'s Schluß nicht zulässig ist:

*„Deshalb gehen auch wir den Weg des geringsten Widerstandes und sagen, daß die Feldenergie durch (den Maxwellschen Ausdruck) gegeben ist. Dann muß der Strömungsvektor  $\vec{S}$  durch (den Poyntingschen Ausdruck) gegeben sein.“*

Dieser Schluß beruht nämlich auf der zusätzlichen und nicht näher begründeten konventionellen Forderung, Energiedichte und Energiestromdichte dürften nur von den Feldstärken, nicht aber von deren Ableitungen oder von den Potentialen abhängen.

Die Behauptung von *Wallace* und *O'Connell* [53], aus dem *Hines*-Bild ergebe sich für die Strahlungsleistung eines beschleunigten, elektrisch geladenen Körpers ein falscher Wert, beruhte auf einem Rechenfehler: In Kapitel 7.3 hat sich gezeigt, daß sich nicht nur die abgestrahlte Leistung, sondern sogar deren Winkelverteilung korrekt ergibt - allerdings nur im zeitlichen Mittel. Diese Einschränkung eröffnet zumindest im Prinzip die Möglichkeit einer experimentellen Entscheidung. Die Erfolgsaussichten erscheinen mir aber sehr zweifelhaft: direkte *Energiemessungen* (z.B. Messungen lokaler Temperaturänderungen) - und nur solche könnten eine Entscheidung ermöglichen - sind notwendigerweise träge. Zumindest hat noch niemand ein solches Experiment versucht.

Selbst die Forderung nach Symmetrie des relativistischen Energie-Impuls-Tensors, auf der *Furry*'s [12] Argumentation beruht und aus der ein Zusammenhang zwischen Impulsdichte und Energiedichte (3.28) folgt, ergibt nur einschränkende Bedingungen für die Zusatzfelder in (3.19), zu denen die hier diskutierten Alternativen nicht im Widerspruch stehen. Insofern ist auch *Feynman*'s abschließendes Diktum unzulässig:

*„Diese mysteriöse zirkulierende Energieströmung (um einen elektrisch geladenen Körper in einem Magnetfeld), die zunächst so*

*lächerlich erschien, ist absolut notwendig. Es gibt wirklich eine Impulsströmung. Sie ist für die Erhaltung des Drehimpulses in der ganzen Welt unerläßlich.*“ ([11], S. 27-8)

Auf diesem Argument beruht auch die Ablehnung der Bilder von *Hines* und *Lai* durch *Lorrain* [27]:

*„Both the Slepian vector discussed by Lai and the Hines vector give zero momentum density in static fields with zero current density, and must therefore be rejected.*

*The fact that a stationary object can possess an angular momentum is rather shocking, at first sight, but that is clearly inevitable.*“

Da aber beim Impuls Dichte und Stromdichte ebenso wenig durch eine Kontinuitätsgleichung eindeutig bestimmt sind wie bei der Energie, läßt sich *Feynman's* „Paradoxon“ ([11], Kap. 17-4, [3]) der geladenen Scheibe, die beim Abschalten des Stromes in einer Spule um die Spulenachse zu rotieren beginnt, auch ohne die Annahme auflösen, ein statisches elektromagnetisches Feld besitze einen Drehimpuls.

Es scheint also bis heute keine allgemein akzeptierten Argumente zu geben, mit deren Hilfe sich eindeutige Ausdrücke für Dichte und Stromdichte der Energie in elektromagnetischen Feldern ergeben. Aber selbst wenn es solche Argumente gäbe, dann müßten sie Lernenden genannt werden können. Mindestens müßte darauf hingewiesen werden, daß die Darstellung eines bestimmten Energieflußbildes weit über die den Lernenden bekannten Phänomene hinausgeht und daß es andere mit diesen verträgliche Darstellungen gibt.

Für die Entscheidung zwischen verschiedenen Bildern können folgende Argumente herangezogen werden:

- Die *Poyntingsche* Darstellung ist seit langem allgemein akzeptiert. Sie ist bisher noch niemals in einen Widerspruch zu experimentellen Ergebnissen geraten.
- Die alternativen Darstellungen werden bisher nur in einem kleinen Kreis diskutiert. Allerdings können, das ist ein Ergebnis dieser Arbeit, auch mit ihnen alle Erfahrungen widerspruchsfrei beschrieben werden.
- Das *Poynting*-Bild führt in vielen einfachen Anordnungen zu Aussagen, die der unmittelbaren Anschauung widersprechen: Es postuliert ringförmige „Superströme“ in statischen Feldern und lokalisiert Energieflüsse außerhalb elektrischer Leiter und magnetischer Materialien.

Im Gegensatz dazu werden in den alternativen Darstellungen (in unterschiedlicher Ausprägung) Energieströme in allen den Anordnungen an Materie geknüpft, in denen die Energie nicht unzweifelhaft eine materielle Anordnung verläßt.

- Die Energie eines geladenen Kondensators befindet sich dann in den Platten bzw., bei geeigneter Wahl des Potentials, auf einer Platte und nicht im elektrischen Feld im Zwischenraum (siehe Bild 4.5b).
  - Bei einer stromdurchflossenen Spule ist dann - wie bei einer gespannten Feder - die Energie in den sich gegenseitig anziehenden Windungen gespeichert und nicht im magnetischen Feld im Inneren der Spule (siehe Bild 4.5c).
  - In einem Transformator geht die Energie - statt wie im *Poynting*-Bild um ihn herumzuströmen (siehe Bild 5.2) - direkt von den Windungen der Primärspule auf die der Sekundärspule über, um von dort durch die Kabel zum Verbraucher weiterzuströmen (siehe Bild 5.3).
- Die *Poynting*schen Ausdrücke für Dichte und Stromdichte der Energie sind formal einfacher als in den alternativen Darstellungen. Sie enthalten nur die Feldstärken, aber keine Ableitungen und Potentiale.
  - Durch das Auftreten der elektrodynamischen Potentiale in den alternativen Ausdrücken sind die alternativen Bilder nicht eichinvariant. Diese Abhängigkeit von der Eichung kann aber als Ausdruck für die fehlende Eindeutigkeit von Energieflußbildern gewertet werden. So kann man z.B. bei der Wellenleitung in der *Hines*-Darstellung und in der neuen Darstellung durch Umeichung der Potentiale den Energiefluß aus dem Zwischenraum in die Leiter verlegen (und umgekehrt). Allgemein geht die *Lai*-Darstellung in die *Poynting*-Darstellung über, wenn  $\Phi \equiv 0$  gewählt wird.
  - Obwohl die *Poynting*schen Ausdrücke formal einfacher sind, sind die alternativen Ausdrücke in vielen Fällen einfacher zu berechnen und führen zu wesentlich weniger komplexen Aussagen:
    - Im *Poynting*-Bild ist die Energieströmung bei der Zweidraht-Leitung in komplizierter Weise über den Raum in der Umgebung der Leiter verteilt. Ihre Details hängen von der genauen geometrischen Konfiguration der Leitung ab und sind schwierig zu berechnen. Im Gegensatz dazu ist in den alternativen Bildern der Energiefluß

unabhängig von der Konfiguration in den Leitern lokalisiert. Diese Aussage folgt (im Gleichstromfall) allein aus dem Verschwinden aller zeitlichen Ableitungen.

- Entsprechende Aussagen ergeben sich für die Wellenleitung. Dabei kann die Lokalisierung des Energietransportes in den Leitern im *Hines*-Bild und im neuen Bild allein aus Symmetrieüberlegungen gefolgert werden. Die Feldstärken und Potentiale brauchen nicht explizit berechnet zu werden.
- Beim harmonisch schwingenden *Hertz*schen Dipol strömt die Energie im *Poynting*-Bild nicht nur in radialer Richtung vom Dipol fort, sondern auch (zumindest im Nahfeld) in meridionaler Richtung um ihn herum (siehe Bild 7.2). Da die Energiedichte zeitlich und räumlich oszilliert, gilt gleiches für die Energiestromdichte. Im neuen Bild sind dagegen Dichte und Stromdichte der Energie zeitlich konstant, und die Energie strömt radial vom Dipol fort (siehe Bild 7.5).

Solche Argumente ändern jedoch nichts daran, daß die Festlegung eines Bildes rein konventionell ist und andere Vorstellungen nicht als „falsch“ ausschließt. Die Versuche, den Schülern den Begriff der „potentiellen Energie“ zu verbieten, ihnen also die Vorstellung auszureden, die Energie sei in geladenen (oder hochgehobenen<sup>1</sup>) Körpern gespeichert, (wie sie z.B. von *Rückl* ([42], z.B. S. 282f) ausführlich beschrieben werden) stellen deshalb eine didaktisch fragwürdige Festschreibung eines von vielen möglichen Bildern dar.

Mir scheint es wichtig zu betonen, daß Aussagen über Details der Energieströmung in den meisten Fällen zur Beschreibung und Vorhersage technischer Vorgänge überflüssig sind:

*„Sie könnten glauben, daß Sie alle Ihre Vorstellungen (über die Lokalisierung der Energie im elektromagnetischen Feld) neu durchdenken und hier vieles lernen müßten. Aber das erscheint nicht notwendig. . . . Wird die Idee der Energieerhaltung angewandt, so erweist es sich nur selten als wichtig, daß man im einzelnen feststellt, welchen Weg die Energie nimmt. Die Zirkulation der Energie um einen Magneten und eine Ladung ist offenbar in den meisten Fällen ziemlich unwichtig. Es ist kein wesentliches Detail, aber es zeigt deutlich, daß unsere üblichen Vorstellungen völlig falsch sind.“*

---

<sup>1</sup>Für die potentielle Energie im Schwerfeld der Erde scheint dasselbe zu gelten: Auch in Gravitationsfeldern ist die Energie nicht eindeutig lokalisierbar ([43], [7]).

Dieser Auffassung *Feynman's* ([11], S. 27-13) schließe ich mich (bis auf den letzten Teilsatz) an. Mir scheint es deshalb wichtiger, Schüler lernten die Frage nach der Lokalisierung der Energie als ungelöstes Problem kennen. Ich mache mir allerdings keine Illusionen: Schüler wollen, wenn über die Energie „als eine Art Substanz“ und über Energieflüsse gesprochen wird, konkrete Antworten und bilden sich, wenn es sein muß, ihre Vorstellungen auf eigene Faust.

Insofern sollten Schülern dann Bilder angeboten werden, nachdem folgendes deutlich geworden ist: Beobachtbar sind zunächst nur das Abnehmen der Energie am Generator und - in den meisten Fällen im Rahmen der Meßgenauigkeit *zeitgleich* - ein Freiwerden von Energie am Verbraucher. Gleichzeitig treten zwischen Generator und Verbraucher und in ihrer Umgebung zusätzliche Phänomene auf, die durch physikalische Größen wie „elektrische Stromstärke“, „elektrische Spannung“, „elektrische Feldstärke“ und „magnetische Feldstärke“ beschrieben werden können. Obwohl diese Phänomene zunächst keinen energetischen Aspekt haben und deshalb die Messung dieser Größen keine direkte Energiemessung darstellt, können sie als Hinweis auf einen Energiefluß *interpretiert* werden. Je nachdem auf welche Phänomene man sich konzentriert, ergeben sich verschiedene Energieflußbilder. Da keine wandernden „Energiepakete“ zu beobachten sind, meist nicht einmal eine zeitliche Abfolge, bleibt auch die Antwort auf die Frage nach der Fließgeschwindigkeit offen.

# Literaturverzeichnis

- [1] U. Backhaus: *Die Entropie als Größe zur Beschreibung der Unumkehrbarkeit von Vorgängen*, Dissertation: Universität Osnabrück 1982
- [2] U. Backhaus, K. Schäfer: *On the uniqueness of the vector for energy flow density in electromagnetic fields*, Am. J. Phys. **54/13**, 279 (1986)
- [3] T. Bahder, J. Sak: *Elementary solution to Feynman's disk paradox*, Am. J. Phys. **53/5**, 495 (1985)
- [4] K.-D. Becker: *Ausbreitung elektromagnetischer Wellen*, Springer: Berlin usw. 1974
- [5] K. Birkeland: *Über die Strahlung elektromagnetischer Energie im Raume* Ann. Phys. Chem. **52**, 357 (1894)
- [6] H. Ebinghaus: *Der Energietransport bei elektromagnetischen Vorgängen*, Physik und Didaktik **4**, 255 (1975)
- [7] A. Einstein, Sitzungsber. Preuß. Akad. d. Wiss. **24**, 488 (1918)
- [8] G. Falk, F. Herrmann: *Physikalische Grundlagen und didaktisches Konzept einer elementaren Einführung in die Physik*, in: Konzepte eines zeitgemäßen Physikunterrichts, Heft 3: Ein moderner Physikkurs für Anfänger und seine Begründung, Schroedel: Hannover 1979
- [9] G. Falk, F. Herrmann, G. B. Schmid: *Energy forms or energy carriers?*, Am. J. Phys. **51/12**, 1074 (1983)
- [10] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands: *Vorlesungen über Physik, Band I: Hauptsächlich Mechanik, Strahlung und Wärme*, Oldenbourg: München - Wien 1974
- [11] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands: *Vorlesungen über Physik, Band II: Elektrodynamik und Materie*, Oldenbourg: München - Wien 1974

- [12] W. H. Furry: *Examples of momentum distributions in the electromagnetic field and in matter*, Am. J. Phys. **37/6**, 621 (1969)
- [13] M. A. Heald: *Energy flow in circuits with Faraday emf*, Am. J. Phys. **56/6**, 540 (1988)
- [14] K. Hecht: *Energie-Strömung und Energie-Umwandlung im elektrischen Stromkreis*, Praxis der Naturwissenschaften/Physik **30/4**, 101 (1981)
- [15] G. Heiduck: *Ist ein Energiestrom bewegte Energie?*, Vortrag auf der Frühjahrstagung der DPG, Gießen 1982
- [16] F. Herrmann: *Der Impulsstrom*, in: Konzepte eines zeitgemäßen Physikunterrichts, Heft 5: Klassische Mechanik in moderner Darstellung, Schroedel: Hannover 1982
- [17] F. Herrmann, G. B. Schmid: *The Poynting vector field and the energy flow within a transformer*, Am. J. Phys. **54/6**, 528 (1986)
- [18] H. Hertz: *Ausbreitung der elektrischen Kraft*, zitiert nach [5]
- [19] C. O. Hines: *Electromagnetic energy density and flux*, Can. J. Phys. **30**, 123 (1952)
- [20] W. Jung: *Aufsätze zur Didaktik der Physik und Wissenschaftstheorie*, Diesterweg: Frankfurt/M. 1979
- [21] D. H. Kobe: *Energy flux vector for the electromagnetic field and gauge invariance*, Am. J. Phys. **50/12**, 1162 (1982)
- [22] T. S. Kuhn: *Die Struktur wissenschaftlicher Revolutionen*, suhrkamp: Frankfurt/M.
- [23] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Sec. 17.5, New York 1975
- [24] C. E. Jäkel: *Eine Lanze für den Poynting-Vektor*, MNU **41/1**, 30 und **41/2**, 87 (1988)
- [25] J. Larmor: *On the Theory of the Magnetic Influence on Spectra; and on the Radiation from moving Ions*, Phil. Mag. **44**, 503 (1897)
- [26] C.S. Lai: *Alternative choice for the energy flow vector of the electromagnetic field*, Am. J. Phys. **49/9**, (1981)
- [27] P. Lorrain: *Alternative choice of the energy flow vector of the electromagnetic field*, Am. J. Phys. **50/6**, 492 (1982)

- [28] P. Lorrain: *The Poynting vector in a transformer*, Am. J. Phys., **52/11**, 987 (1984)
- [29] J. C. Maxwell: *Treatise on Electricity and Magnetism*, 3rd edition (1891), 2 vols, reprint by Dover: New York 1954
- [30] R. J. Mayer: *Die organische Bewegung in ihrem Zusammenhange mit dem Stoffwechsel*, 1845; nachgedruckt in R. Mayer, Die universelle Anwendung des Prinzips vom mechanischen Äquivalent der Wärme (P. Buck, Hrsg.), Franzbecker: Hildesheim 1980
- [31] H. M. Macdonald: *Electric Waves*, Cambridge University Press, Cambridge 1902
- [32] H. Nägerl, C. Henze: *Zur Abstrahlung elektromagnetischer Wellen*, Physik und Didaktik **11/1**, 13 (1983)
- [33] P. Penfield, H. A. Haus, *Electrodynamics of moving Media*, Cambridge/Mass. 1967
- [34] P.-C. Peters: *Objections to an alternate energy flow vector*, Am. J. Phys. **50/12**, 1165 (1982)
- [35] B. Podolsky, K. S. Kunz: *Fundamentals of Electrodynamics*, Marcel Dekker: New York, London 1969
- [36] J. H. Poynting: *On the Transfer of Energy in the Electromagnetic Field*, Phil. Trans. **175**, 343 (1884)
- [37] O. Rang: *Welchen Weg nimmt die elektrische Energie?*, Der Physikunterricht **13/4**, 43 (1979)
- [38] F. Rohrlich: *Comment on the preceding paper by T.H.Boyer (Classical theory of the electron and the definition of electromagnetic field momentum*, Phys. Rev. D **25/12**, 3251 (1982)
- [39] F. Rohrlich, *Classical Charged Particles*, Sec. 6-3, Reading/Mass. 1965
- [40] R. H. Romer: *Alternatives to the Poynting vector for describing the flow of electromagnetic energy*, Am. J. Phys. **50/12**, 1166 (1982)
- [41] E. Rückl: *Zur Energieübertragung in elektromagnetischen Feldern am Beispiel des Transformators*, Naturwissenschaften im Unterricht Physik/Chemie **37**, 163 (1989)

- [42] E. Rückl: *Feldenergie - Ein neues didaktisches Konzept*, BI Wissenschaftsverlag: Mannheim usw. 1991
- [43] K. Schäfer: *Ist die Energie eine lokalisierbare Größe?*, Vortrag auf der 74. Hauptversammlung der MNU, Tübingen März 1983
- [44] K. Schäfer, W. Kuhn: *Strahlungsfeld und Richtcharakteristik von Antennen*, Praxis der Naturwissenschaften/Physik **35/6**, 13 (1986)
- [45] H.-J. Schlichting, U. Backhaus: *Energie als grundlegendes Konzept*, Physik und Didaktik **7/2**, 139 (1979)
- [46] A. E. Siegman: *Letter to the editor*, Am. J. Phys. **51/6**, 492 (1983)
- [47] J. Slepian: *Energy and Energy Flow in the Electromagnetic Field*, J. Appl. Phys. **13**, 512 (1942)
- [48] A. Sommerfeld, *Vorlesungen über Theoretische Physik, Band III: Elektrodynamik*, Harri Deutsch: Thun, Frankfurt/M. 1977
- [49] W. Stegmüller: *Probleme und Resultate der Wissenschaftstheorie und Analytischen Philosophie, Band II: Theorie und Erfahrung*, Springer: Berlin usw. 1970
- [50] W. Stöbel: *Die Rolle der Energie in der Mechanik*, Konzepte eines zeitgemäßen Physikunterrichts, Heft 5: Klassische Mechanik in moderner Darstellung, Schroedel: Hannover 1982
- [51] D. Villaroel: *On Redefinitions of the Energy Momentum Tensor*, Ann. Phys. (N.Y.) **89**, 241 (1975)
- [52] M. Wagenschein: *Die pädagogische Dimension der Physik*, Diesterweg: Frankfurt/M. 1973
- [53] G. L. Wallace, R. F. O'Connell: *Energy flow vector of the electromagnetic field*, Can. J. Phys. **58**, 744 (1980)

# Danksagung

Ich widme diese Arbeit dem Andenken an Prof. Dr. *Klaus Schäfer*, mit dem gemeinsam ich die Grundlagen dazu in vielen intensiven Gesprächen erarbeitet habe, nachdem er 1983 zum ersten Mal über den hier behandelten Problembereich vorgetragen hatte [43]. Als *Klaus Schäfer* am 1. Mai 1985 völlig unerwartet starb, war die gemeinsame Arbeit erst zu einem Zwischenergebnis gekommen [2]. Diese Arbeit stellt den Versuch dar, die begonnenen Überlegungen zu einem Abschluß zu bringen. Ich bin sicher, diese Arbeit wäre auch in seinem Sinne gewesen, auch wenn *Klaus Schäfer* vielleicht bei einigen Schlußfolgerungen nicht ganz so weit gegangen wäre.

Diese Arbeit wäre nicht entstanden ohne die vielen Diskussionen mit Prof. Dr. *Paul Farwig*, in denen ich nicht nur die ersten Anregungen zu den hier dargestellten Überlegungen erhielt, sondern auch immer wieder gezwungen wurde, meine Gedanken zu präzisieren. Dafür bin ich *Paul Farwig* sehr dankbar.

Schließlich danke ich noch Prof. Dr. *Hans-Joachim Schlichting* für die fruchtbare Zusammenarbeit während vieler Jahre, die mich entscheidend geprägt und dadurch sicher einen großen Einfluß auf diese Arbeit gehabt hat.



# Anhang: Formelsammlung

## Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (9.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (9.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad (9.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \dot{\vec{E}} \quad (9.4)$$

## Elektrodynamische Potentiale

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (9.5)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \dot{\vec{A}}$$

$$\text{Coulomb-Eichung : } \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad \wedge \quad \nabla^2 \Phi = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0} \quad (9.6)$$

$$\text{Lorentz-Eichung : } \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \dot{\Phi} = 0 \quad (9.7)$$

## Vektorformeln

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \quad (9.8)$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \quad (9.9)$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) \quad (9.10)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\psi = 0 \quad (9.11)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) = 0 \quad (9.12)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a} \quad (9.13)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\psi \vec{a}) = \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \psi + \psi \vec{\nabla} \cdot \vec{a} \quad (9.14)$$

$$\vec{\nabla} \times (\psi \vec{a}) = \vec{\nabla} \psi \times \vec{a} + \psi \vec{\nabla} \times \vec{a} \quad (9.15)$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}(\vec{a} \cdot \vec{b}) &= (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a} + \vec{a} \times (\vec{\nabla} \times \vec{b}) \\ &\quad + \vec{b} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) \end{aligned} \quad (9.16)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b}) \quad (9.17)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a}(\vec{\nabla} \cdot \vec{b}) - \vec{b}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b} \quad (9.18)$$

*kartesische Koordinaten* ( $x_1, x_2, x_3$ )

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{e}_x + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{e}_y + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{e}_z \quad (9.19)$$

$$\vec{\nabla} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \vec{e}_3 \quad (9.20)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \quad (9.21)$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{v} &= \left( \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \vec{e}_1 + \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \vec{e}_2 \\ &\quad + \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \vec{e}_3 \end{aligned} \quad (9.22)$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} \quad (9.23)$$

*zylindrische Koordinaten* ( $\rho, \varphi, z$ )

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_\varphi b_z - a_z b_\varphi) \vec{e}_\rho + (a_z b_\rho - a_\rho b_z) \vec{e}_\varphi + (a_\rho b_\varphi - a_\varphi b_\rho) \vec{e}_z \quad (9.24)$$

$$\vec{\nabla} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial \psi}{\partial z} \vec{e}_z \quad (9.25)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho v_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (9.26)$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{v} &= \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_\rho + \left( \frac{\partial v_\rho}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial \rho} \right) \vec{e}_\varphi \\ &\quad + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho v_\varphi}{\partial \rho} - \frac{\partial v_\rho}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z \end{aligned} \quad (9.27)$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (9.28)$$

sphärische Koordinaten  $(r, \theta, \varphi)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_\theta b_\varphi - a_\varphi b_\theta) \vec{e}_r + (a_\varphi b_r - a_r b_\varphi) \vec{e}_\theta + (a_r b_\theta - a_\theta b_r) \vec{e}_\varphi \quad (9.29)$$

$$\vec{\nabla} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \quad (9.30)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \quad (9.31)$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{v} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\varphi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r + \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\varphi) \right) \vec{e}_\theta \\ &\quad + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\varphi \end{aligned} \quad (9.32)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \\ &\quad \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r \psi)}{\partial r^2} \right] \end{aligned} \quad (9.33)$$