Die schnellste Verbindung

oder

Zwangskräfte bei krummlinigen Bewegungen

Udo Backhaus, Universität Koblenz

1 Motivation und Problemstellung

Seit *J. W. Warren* ([6]) 1979 eindrucksvoll auf die Schwierigkeiten, die häufig beim Lernen des Newtonschen Kraftbegriffes auftreten, hingewiesen und Strategien zu ihrer Überwindung vorgeschlagen hat, haben sich viele didaktische Arbeiten mit diesem Problemkreis beschäftigt[1]. Tatsächlich sind seitdem die Schulbuchdarstellungen zum Newtonschen Kraftbegriff deutlich angemessener geworden. Trotzdem zeigen Untersuchungen zu Schülervorstellungen immer wieder dieselben Schwierigkeiten.

Ein Grund dafür mag darin zu suchen sein, daß sich in vielen Hochschullehrbüchern und Schulbüchern außerhalb des Kapitels über die Newtonschen Gesetze immer noch mißverständliche oder falsche Darstellungen finden, die die Fehlvorstellungen der Lernenden zu bestätigen scheinen. Das soll hier am Beispiel des Fadenpendels, oder allgemeiner anhand krummliniger Bewegungen erläutert werden.

Als Leitfrage diene dazu das folgende Problem: Eine Kugel soll sich allein aufgrund der Schwerkraft von einem Ort A zu einem Ort B bewegen, der von A den vorgegebenen Horizontalabstand $l = 1m$ habe. Der Höhenunterschied zwischen Start- und Zielpunkt, die Starthöhe h also, kann frei gewählt werden.

> *Welche Zeit t_{min} benötigt die Kugel mindestens? Bei welcher Starthöhe und bei welcher Bahnform ist die Laufzeit am kürzesten?*

2 Vorüberlegungen

Die Antwort auf diese Fragen scheint zunächst einfach: Man erwartet, daß die kürzeste Zeit auf der kürzesten Verbindung, auf der schiefen Ebene also, benötigt wird. Auf dieser ist die Beschleunigung, und damit die mittlere Geschwindigkeit, umso größer, je steiler die Bahn ist. Allerdings wird mit zunehmenden Neigungswinkel α auch die zu überwindende Strecke länger. Man erwartet deshalb, daß es eine optimale Neigung gibt.

[1] Eine sehr gute Zusammenfassung findet man z.B. bei *Wodzinski* ([7]).

Das Optimum läßt sich leicht finden, wenn man nur die Horizontalkomponente der Bewegung betrachtet: Zwischen Bahnbeschleunigung $a_{||}$ und Horizontalbeschleunigung a_H besteht offensichtlich der folgende Zusammenhang:

$$a_H = a_{||} \cos\alpha = g \sin\alpha \cos\alpha = \frac{1}{2} g \sin 2\alpha.$$

Die Horizontalbeschleunigung ist also für $\alpha = 45°$ am größten. In diesem Fall, im folgenden als 45°-Ebene bezeichnet, beträgt die Laufzeit

$$t_{45°} = \sqrt{\frac{2l}{a_H}} = \sqrt{\frac{4l}{g}} = 0.639s. \tag{1}$$

Diese Zeit stellt für *geradlinige* Bahnen das Minimum dar. Es bleibt die Frage zu klären, ob sich durch eine *krummlinige* Bahn eine weitere Zeitverkürzung erreichen läßt.

Auch zu dieser Frage lassen sich qualitative Überlegungen anstellen:

- Wählt man als Anfangshöhe $h = 0$, dann wird die Laufzeit auf der schiefen Ebene offensichtlich unendlich groß. Hängt man jedoch die Kugel an einen Faden und läßt sie von A nach B pendeln, dann erreicht sie in endlicher Zeit ihr Ziel[2].
- Wählt man eine zu Beginn steile Bahn, dann erreicht die Kugel schnell ein hohes Tempo. Ihr Durchschnittstempo wird also ebenfalls groß, und man kann eine kürzere Laufzeit erwarten, wenn die größere Bahnlänge diesen Effekt nicht kompensiert.

Beide Argumente sprechen dafür, auch gekrümmte Bahnen in die Überlegungen mit einzubeziehen.

Bei Verwendung von Pendeln ist klar, daß die erreichbare Zeit von der Fadenlänge abhängt: Für eine Fadenlänge von $l_F = \frac{1}{2}l$ (in diesem Fall ist die Anfangshöhe $h = 0$!) ergibt sich mit

$$t = \frac{1}{2}T = \frac{1}{2} \cdot 1.18 \cdot 2\pi\sqrt{\frac{l_F}{g}} = 0.837s,$$

eine zu große Zeit[3]. Wählt man jedoch eine Fadenlänge, die dem Abstand der beiden Punkte entspricht ($l_F = l$, in diesem Fall entspricht die Anfangshöhe $h = l$ derjenigen der 45°-Ebene), dann ergibt sich mit

$$t = \frac{1}{4}T = \frac{1}{4} \cdot 1.18 \cdot 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 0.592s \tag{2}$$

[2]Für dieses Argument, sowie für weitere fruchtbare Diskussionen, bin ich meinem Kollegen *H. Druxes* dankbar.

[3]Der Faktor 1.18 berücksichtigt dabei die Vergößerung der Schwingungsdauer bei einer Amplitude von 90° gegenüber der harmonischen Näherung. Näherungsweise kann er leicht experimentell verifiziert werden.

tatsächlich eine kürzere Zeit als bei der 45°-Ebene! Dadurch taucht jedoch folgendes Problem auf: Die Neigung der kreisförmigen Bahn des Pendels ist an fast allen Stellen von 45° verschieden, die Horizontalkomponente der Bahnbeschleunigung also fast immer kleiner als bei der optimalen schiefen Ebene!

Wie kann dann die Laufzeit beim Pendel kürzer als bei der schiefen Ebene sein?

3 Die Kräfte beim Fadenpendel

Dieses Problem wird durch zahlreiche Darstellungen der Kräfte und Beschleunigungen beim Fadenpendel in Hochschullehrbüchern und Schulbüchern suggeriert. Abbildung 1 zeigt zwei typische Darstellungen ([5], S. 395, [2], S. 218). Beiden Bildern und den zugehörigen erläuternden Texten zufolge ist die Kraft, die der Faden auf den Pendelkörper ausübt, dem Betrage nach gleich der Radialkomponente der Schwerkraft, die Gesamtkraft also *tangential* gerichtet. Die Lernenden werden so in ihrer tiefverwurzelten Überzeugung bestärkt, die Kraft müsse in *Bewegungsrichtung* und nicht in *Beschleunigungsrichtung* wirken. Wenn diese Darstellungen richtig wären, dann stimmten beide Richtungen überein – und die Bewegung wäre geradlinig. Die Horizontalbeschleunigung wäre tatsächlich kleiner als bei der schiefen Ebene, und das Pendel könnte unmöglich schneller sein!

Tatsächlich sind solche Darstellungen nur richtig für den *Umkehrpunkt* der Bewegung, in dem der Pendelkörper die Geschwindigkeit 0 hat. Im allgemeinen Fall dagegen muß die auf den Körper wirkende Kraft *zusätzlich* eine radial nach innen gerichtete Komponente haben, die den Körper auf der Kreisbahn hält. Die Fadenkraft muß deshalb um $m\frac{v^2}{r}$ *größer* sein als $mg\cos\varphi$ – und dieser Effekt ist i.a. nicht zu vernachlässigen (s. Abb. 2[4]).

Eine korrekte Darstellung muß deshalb dreierlei deutlich machen:

1. Auf den Pendelkörper wirken zwei Kräfte. Die Vektorsumme dieser beiden Kräfte ergibt die Gesamtkraft.

2. Für die Änderung der Schnelligkeit des Pendelkörpers, also des *Betrages* seiner Geschwindigkeit, ist die Tangentialkomponente der Gesamtkraft verantwortlich.

3. Die Gesamtkraft jedoch ist *nach innen* gerichtet.

So selbstverständlich diese Gesichtspunkte für eine konsequente Anwendung der Newtonschen Gesetze sein sollten, so offensichtlich werden sie von den meisten Darstellungen verletzt.

Die Tangentialkomponente der Resultierenden kann bei einem Faden, der nur auf Zug belastet werden kann, nur durch die Schwerkraft erzeugt werden. Sie hat deshalb den Betrag $mg\sin\varphi$, und alle sich üblicherweise anschließenden quantitativen Überlegungen bleiben – natürlich – richtig.

[4] Im Falle einer Amplitude von 90° ist die Fadenkraft – unabhängig von der momentanen Auslenkung! – dreimal so groß wie die Radialkomponente der Schwerkraft!

4 Lösung

Jetzt ist verständlich geworden, warum das Pendel schneller sein kann als die 45°-Ebene: *Die Kugel wird durch die vom Faden erzeugte Zwangskraft zusätzlich horizontal beschleunigt.* Da diese Zwangskraft mit dem Quadrat der Geschwindigkeit wächst, ist es geschickt, die Kugel zunächst durch eine steile Bahn auf hohes Tempo zu bringen und anschließend durch eine Kurve stark horizontal zu beschleunigen.

Um die minimale Laufzeit zu finden, müssen nun die Laufzeiten auf Bahnen mit *beliebiger Krümmung* untersucht werden. Auch dieses allgemeine Problem kann noch analytisch gelöst werden. Die Lösung wird im Anhang skizziert. Hier soll jedoch gezeigt werden, daß sich eine Lösung auf einfache Weise numerisch finden läßt, wenn man die Bahnform sich schrittweise so verändern läßt, daß die Laufzeit immer kürzer wird.

Der Algorithmus[5] simuliert in gewisser Weise einen *evolutionären Prozeß*: Ausgehend von einer schiefen Ebene wird die Bahn durch *Mutation* zufällig verändert. Von konkurrierenden Bahnen setzt sich durch *Selektion* diejenige durch, die zu einer kürzeren Laufzeit führt:

Evolutionärer Algorithmus
zum Finden der Bahn mit minimaler Laufzeit

1. Schritt: Beginne mit n Stützstellen, deren geradlinige Verbindungen eine schiefe Ebene bilden.

2. Schritt: Verdopple die Anzahl n der Stützstellen, indem jede Verbindungsstrecke halbiert wird.

3. Schritt: Bestimme durch Zufall eine Stützstelle der Bahn.

4. Schritt: Bestimme durch Zufall, ob diese Stützstelle erhöht oder erniedrigt werden soll.

5. Schritt: Erzeuge eine neue Bahn, indem die veränderte Stützstelle geradlinig mit ihren Nachbarn verbunden wird.

6. Schritt: Berechne für die neue Bahn die Laufzeit.

7. Schritt: Ist diese Laufzeit kürzer als die bisherige, übernimm die neue Bahn, ansonsten behalte die alte Bahn bei.

8. Schritt: Wiederhole den „Evolutionsprozeß“ ab dem 3. Schritt.

9. Schritt: Wenn keine Verbesserungen mehr auftreten, verdopple die Anzahl der Stützstellen durch Rücksprung zum 2. Schritt.

Abbildung 3 zeigt die Evolution der Bahnen mit einer Starthöhe von $h = 0.4l$: Nach ca. 5000 Mutationen, von denen sich 1200 durchgesetzt haben, hat sich bereits eine Bahn entwickelt, für die die Laufzeit nur noch 75% des ursprünglichen Wertes beträgt und mit $t_{ges} = 0.588s$ das bisherige Minimum unterbietet. Überraschenderweise durchläuft die optimale Bahn ein Minimum: Bei gewissen Starthöhen ist es günstig, daß die Kugel während ihrer Bewegung sogar die Höhe des Zielpunktes unterschreitet – ein Umstand, der sich leicht in einem Freihandexperiment verifizieren läßt(s. Abb. 4).

[5] Ein entsprechendes Pascal-Programm kann in Koblenz angefordert werden.

Durch numerische Bestimmung des Optimums für verschiedene Starthöhen (s. Abb. 5) findet man, daß die minimale Laufzeit bei etwa $h = 0.64l$ erreicht wird:

$$t_{num} = 0.566s \tag{3}$$

Diese Zeit mit um etwa 13% kürzer als die beste mit einer schiefen Ebene erreichbare Zeit (1) und unterbietet auch die oben (2) für das Pendel gefundene Zeit[6]! Abb.6 verdeutlicht noch einmal den Grund: An der eingezeichneten Stelle ist die Horizontalbeschleunigung deutlich größer als die Horizontalkomponente der Bahnbeschleunigung $g \sin \alpha$[7]: Die Kugel wird nicht nur durch die Schwerkraft, sondern auch durch die von der Bahn ausgeübte Zwangskraft nach vorn beschleunigt!

5 Schlußbemerkungen

Die Frage nach der schnellsten Verbindung zwischen zwei Punkten hat sich als sehr fruchtbar erwiesen. Das Problem ist auch Laien unmittelbar verständlich und die Alternativen so motivierend, daß entsprechende Experimente Teil phänomenorientierter Ausstellungen („Phänemena" in Zürich, Amsterdam und Stuttgart, „Phänomenta" in Flensburg) geworden sind.

Vieles deutet darauf hin, daß die Lösung für physikalisch Vorgebildete („Die Endgeschindigkeit ist bei gleicher Starthöhe immer dieselbe, also muß die kürzeste Verbindung auch die schnellste sein." „Die Horizontalbeschleunigung kann nicht größer als bei einer Neigung von 45° sein.") überraschender ist als für Menschen, die mit „gesundem Menschenverstand" an das Problem herangehen („Je steiler die Bahn, desto schneller kommt die Kugel in Fahrt. Anschließend muß sie nur noch umgelenkt werden.").

Die Beschreibung mit dem Newtonschen Kraftbegriff erweist sich nur dann als überzeugend, wenn typischer Fehlvorstellungen („Kraft in Bewegungsrichtung", „Bahn als (toter, passiver) Gegenstand, der die Kugel nicht beschleunigen kann") überwunden worden sind. Es wurde darauf hingewiesen, daß diese Schwierigkeiten durch die üblichen Darstellungen zur Pendelbewegung verstärkt werden.

Die analytische Lösung des sogenannten Brachystochronenproblems geht über die Möglichkeiten des Schulunterrichts hinaus und übersteigt auch das Niveau einführender Vorlesungen in der Hochschulausbildung. Die numerische Behandlung des Problems macht die Lösung jedoch auch dem Schulunterricht zugänglich. Der dabei eingesetzte evolutionäre Algorithmus kann darüberhinaus als Modell für biologische Entwicklungsprozesse und als Ausgangspunkt für die Untersuchung weiterer Optimierungsprobleme dienen.

[6] Das ändert sich allerdings, wenn man die Rotationsenergie der Kugel berücksichtigt. Dadurch verringert sich effektiv die Schwerebeschleunigung um den Faktor $\frac{5}{7}$, die Laufzeit entsprechend um die Wurzel dieses Faktors.

[7] Tatsächlich ist bei dieser Bewegung die Gesamtbeschleunigung dem Betrage nach immer gleich der Erdbeschleunigung (s. Anhang)!

6 Anhang: Die Zykloide

Das sogenannte *Brachystochronen-Problem* hat in der Mathematik eine große Rolle gespielt. Seine Analyse durch *J. Bernoulli* führte zur formalen Begründung der Variationsrechnung ([3], S. 40, [4], S. 82ff). Seine Lösung soll hier kurz skizziert werden[8].

Die schnellste Verbindung ist die Bahn, für die die Laufzeit

$$\begin{aligned} t = \int \frac{ds}{v} &= \int \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{2gy}} = \int_0^l \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}} dx \\ &=: \int_0^l f dx \text{ mit } f = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}} \end{aligned}$$

minimal wird. Das ist dann der Fall, wenn gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0.$$

Durch Einsetzen und längere Rechnung kann man zeigen, daß diese Bedingung durch die folgendermaßen beschriebene Bewegung erfüllt wird:

$$\boldsymbol{\varphi(t) = \sqrt{\frac{g}{a}} t} \tag{4}$$

$$\boldsymbol{x(t) = a(\varphi(t) - \sin \varphi(t))} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{y(t) = h - a(1 - \cos \varphi(t))} \tag{6}$$

Durch diese Gleichungen wird die Bewegung eines Punktes beschrieben, der sich auf dem Umfang eines mit konstanter Geschwindigkeit rollenden Rades befindet. Die Bahn hat die Form einer sogenannten *gespitzten Zykloide* (s. Abb. 7).

Für gegebenen Horizontalabstand und feste Anfangshöhe ($(x_E, y_E) = (l, h)$) müssen zunächst die Endstellung φ_E und der zugehörige Radius a des Rades durch numerische Lösung der Gleichungen (5) und (6) bestimmt werden. Die Laufzeit ergibt sich dann durch Einsetzen in (4). Dabei zeigt sich, daß die Laufzeit für die Höhe minimal wird, bei der die Zykloide gerade kein Minimum mehr aufweist, das Rad sich also um genau 180° dreht. Die Bahn in Abbildung 8 wurde für diesen Fall konstruiert.

Es ist leicht zu sehen, daß für diese Bahn gilt:

$$\begin{aligned} \varphi_E &= \pi \\ \Longrightarrow \quad a_{opt} &= \frac{l}{\pi} \\ \Longrightarrow \quad h_{opt} &= 2a_{opt} = \frac{2l}{\pi} = 0.6366l \\ \Longrightarrow \quad t_{min} &= \sqrt{\frac{a_{opt}}{g}} \varphi_E = \sqrt{\frac{l\pi}{g}} = 0.566s \end{aligned} \tag{7}$$

[8] Eine ausführlichere Ableitung befindet sich in einem internen Arbeitspapier ([1]).

Die Laufzeit auf dieser Bahn ist also um mehr als 10% kürzer als auf der „schnellsten" schiefen Ebene, obwohl die Anfangshöhe deutlich geringer ist! Tatsächlich läßt sich zeigen, daß bis zu einem Höhenunterschied von $h = 0.155l$ die kürzeste mit einer schiefen Ebene erreichbare Zeit unterschritten wird.

Die Beschleunigung $\vec{a} = (a_x, a_y)$ der durch (4)-(6) beschriebenen Bewegung ist offensichtlich

$$\begin{aligned} a_x = \ddot{x} &= g \sin\varphi, \\ a_y = \ddot{y} &= -g\cos\varphi. \end{aligned}$$

Der Betrag der Beschleunigung ist also konstant gleich der Erdbeschleunigung (s. Abb. 8)! Die Horizontalbeschleunigung a_x ist dementsprechend (bei $\varphi = \frac{\pi}{2}$) maximal, wenn die Vertikalbeschleunigung a_y verschwindet. An dieser Stelle hat die Bahn eine Neigung von 45°. Deshalb ist dort die Horizontalbeschleunigung $a_x = g$ um den Faktor $\sqrt{2}$ größer als die Bahnbeschleunigung $a_t = g\sin 45°$ und sogar doppelt so groß wie deren Horizontalkomponente $a_{t_h} = g \sin 45° \cos 45° = \frac{1}{2}g$!

Literatur

[1] U. Backhaus: *Die schnellste Verbindung – Theoretische Lösung des Brachistochronenproblems*, Universität Koblenz 1999

[2] Dorn-Bader: *Physik, Oberstufe MS*, Schroedel: Hannover 1990

[3] H. Goldstein: *Klassische Mechanik*, Akademische Verlagsanstalt: Wiesbaden

[4] A. Sommerfeld: *Vorlesungen über theoretische Physik, Band I: Mechanik*, Harri Deutsch: Thun 1977

[5] P. A. Tipler: *Physik*, Spektrum-Verlag: Heidelberg usw. 1998

[6] J. W. Warren: *Understanding Force*, John Murray: London 1979

[7] R. Wodzinski: *Untersuchungen von Lernprozessen beim Lernen Newtonscher Dynamik im Anfangsunterricht*, Lit-Verlag: Münster 1996

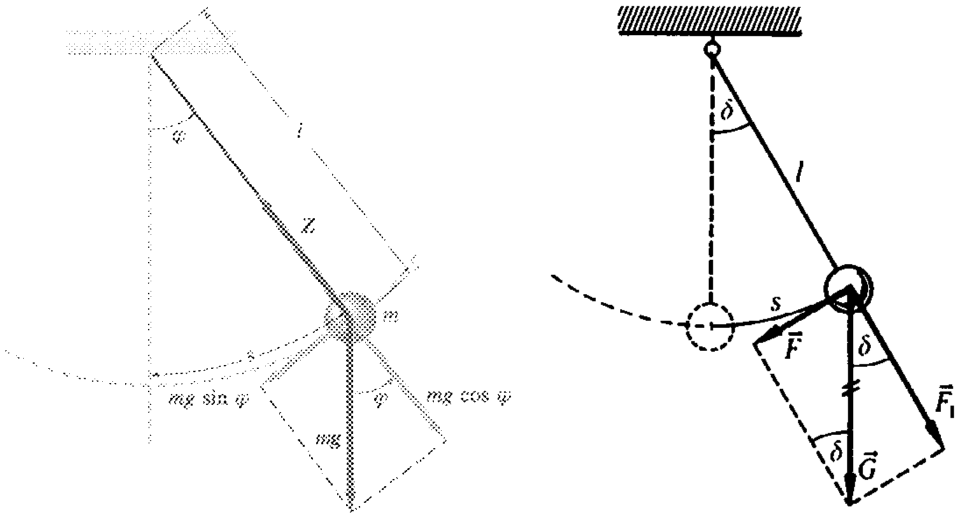

Abbildung 1: Kräfte auf den Pendelkörper eines Fadenpendels in der Darstellung eines Hochschullehrbuches (links) und eines weit verbreiteten Schulbuches (rechts). Die erläuternden Texte lauten: „…, so wirkt die Zugkraft $\mathbf{Z} = -mg\cos\varphi$ entlang des Fadens und dazu senkrecht die Kraft $-mg\sin\varphi$, die in tangentialer Richtung die Kugel in die Gleichgewichtslage zurücktreibt." (links), bzw. „$\vec{F}_1$ wird durch die Spannkraft des Fadens aufgehoben, $\vec{F}$ bleibt als einzige äußere Kraft übrig."(!) (rechts)

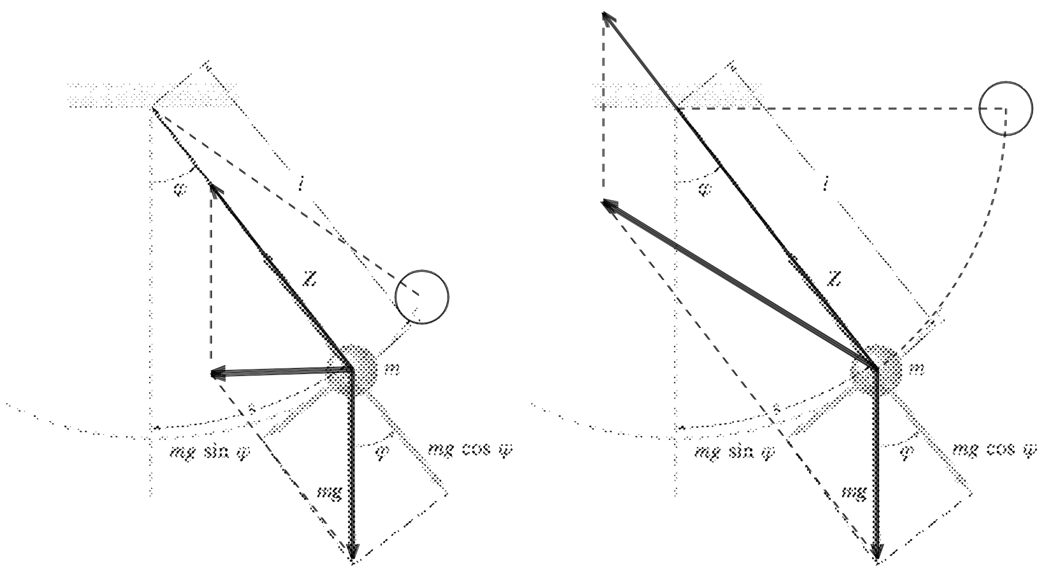

Abbildung 2: Korrigierte Versionen der linken Darstellung aus Abb. 1: Links wird die gestrichelt eingezeichnete Bahn als Andeutung der Schwingungsamplitude interpretiert ($\varphi_0 \approx 55°$), rechts wird eine Amplitude von $90°$ angenommen.

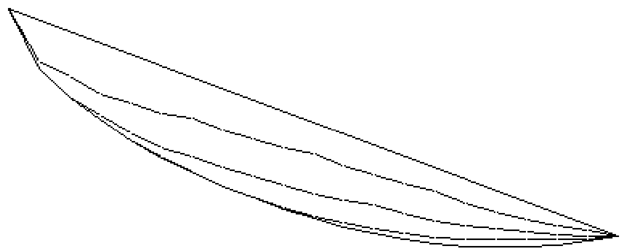

Abbildung 3: Durch Evolution entwickelt sich die schiefe Ebene zu einer gekrümmten Bahn mit wesentlich kürzerer Laufzeit.

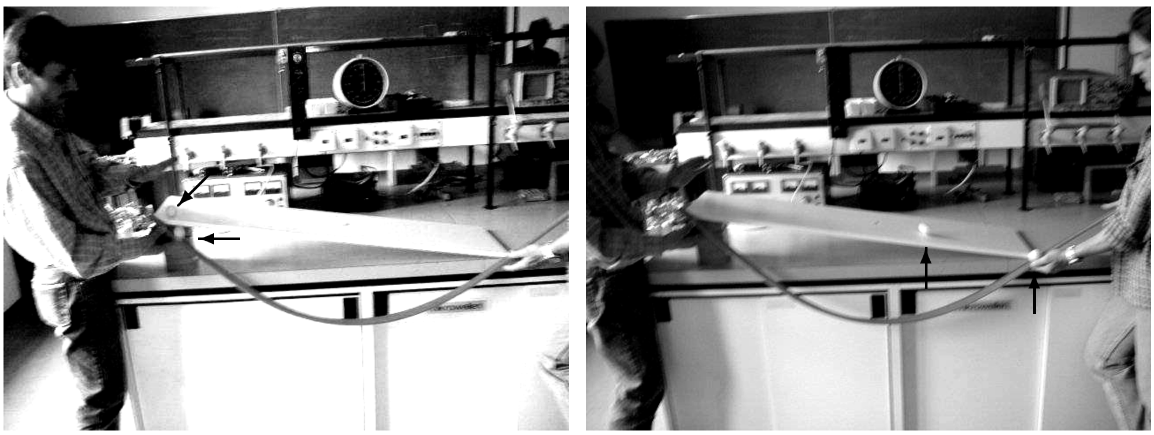

Abbildung 4: Die Kugel auf der gekrümmten Bahn erreicht deutlich früher das Ziel, obwohl große Teile der Bahn unterhalb des Zielniveaus verlaufen.

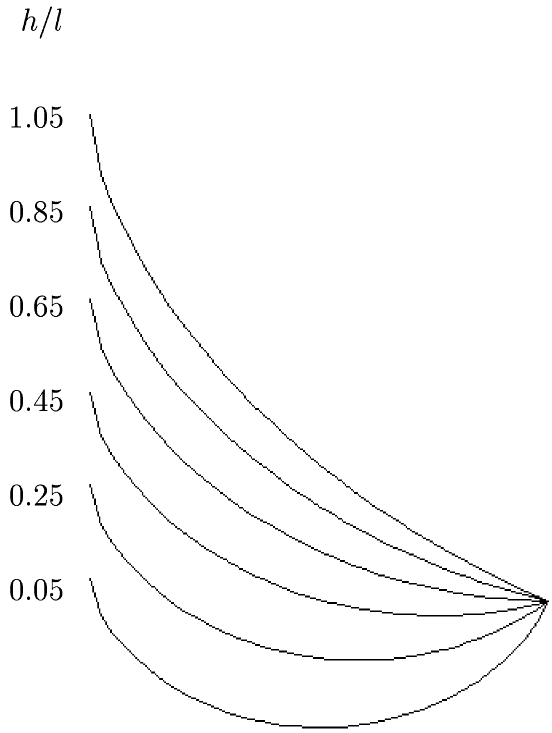

Abbildung 5: Optimale Bahnen für verschiedene Starthöhen ($h = 0.05l,\ 0.25l,\ \ldots, 1.05l$)

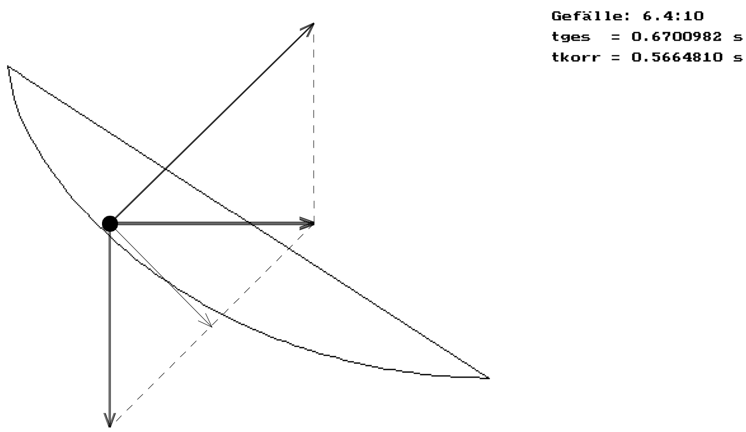

Abbildung 6: Die Gesamtkraft auf die Kugel (und damit ihre Beschleunigung) ergibt sich als Summe auf Schwerkraft und Zwangskraft. Die Horizontalbeschleunigung ist deshalb größer als die Horizontalkomponente der Bahnbeschleunigung: Die Kugel wird durch die Bahn nach vorn beschleunigt!

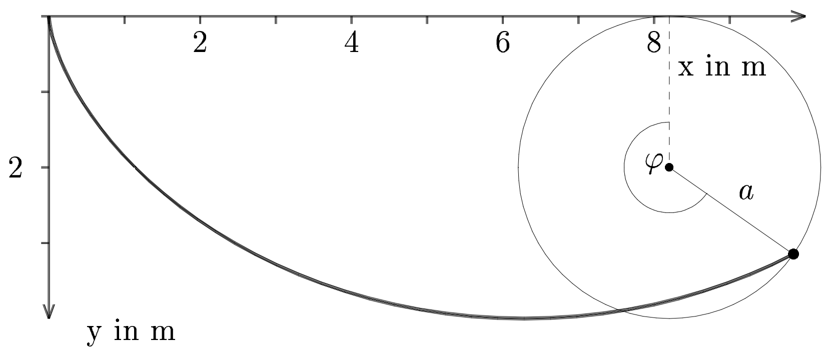

Abbildung 7: Die „gespitzte“ Zykloide ist die Bahn, die ein Punkt auf dem Umfang eines rollenden Rades durchläuft.

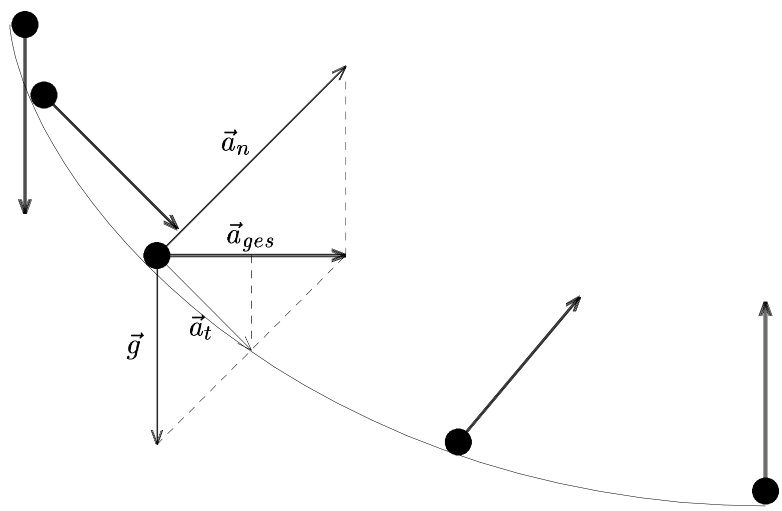

Abbildung 8: Bei der Schwerebewegung auf der Zykloide hat die Gesamtbeschleunigung $\vec{a}_{ges}$ den konstanten Betrag g. Damit hat auch die auf den Körper wirkende Gesamtkraft $\vec{F}_{ges}$, die sich aus der Schwerkraft und der von der Bahn erzeugten Zwangskraft (Normalkraft) zusammensetzt, einen konstanten Betrag.